CAP. 4 : SISTEMAS DE EQ. DIF. ORDINÁRIAS LINEARES DE 1ª ORDEM

$$\boxed{\text{FORMA GERAL: } x' = Ax + g(t)}$$

onde: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$; $x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}_{n\times 1}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$, onde os coeficientes a_{ij} $(i=1,\dots,n)$ e $(j=1,\dots,n)$ são constantes reais

$g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$ e $x_i' = \dfrac{dx_i}{dt}$, $i=1,\dots,n$

4.1 : SISTEMAS HOMOGÊNEOS

FORMA GERAL : $x' = Ax$

SOLUÇÃO GERAL : É DADA PELA COMBINAÇÃO LINEAR DE n SOLUÇÕES l.i.
AS n SOLUÇÕES l.i. SÃO OBTIDAS A PARTIR DOS n AUTOVALORES DA MATRIZ A:

→ CADA AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 1 CONTRIBUI COM 1 SOLUÇÃO l.i : $\xi_i \exp(\lambda_i t)$, onde ξ_i É UM AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_i;

→ CADA AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2 CONTRIBUI COM 2 SOLUÇÕES l.i. HÁ 2 possibilidades :

- se houver 2 AUTOVETORES l.i. ASSOCIADOS AO AUTOVALOR DE MULT. 2, ENTÃO AS 2 SOLUÇÕES SÃO: $\xi_j \exp(\lambda_j t)$ e $\xi_K \exp(\lambda_j t)$, onde ξ_j e ξ_K SÃO AUTOVETORES l.i. ASSOCIADOS AO AUTOVALOR λ_j.
- Se houver APENAS UM AUTOVETOR l.i. ASSOCIADO AO AUTOVALOR DE MULT. 2, ENTÃO AS 2 SOLUÇÕES SÃO: $\xi_m \exp(\lambda_m t)$ e $\left[\xi_m t \exp(\lambda_m t) + \eta_m \exp(\lambda_m t)\right]$, ONDE ξ_m É UM AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_m e η_m É UM AUTOVETOR GENERALIZADO ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_m.

AUTOVALORES E AUTOVETORES COMPLEXOS : SE $\lambda_c = r + j\mu$ FOR AUTOVALOR DA MATRIZ A E CHAMANDO ξ_c O AUTOVETOR (COMPLEXO) ASSOCIADO A λ_c, ENTÃO AS PARTES REAL E IMAGINÁRIA DE $\xi_c \exp(\lambda_c t)$ FORMAM UM CONJUNTO DE 2 SOLUÇÕES l.i. PARA O SISTEMA HOMOGÊNEO $x' = Ax$.

DEFINIÇÕES:
- AUTOVALORES DA MATRIZ A: SÃO OS VALORES DE λ QUE SATISFAZEM $\det(A - \lambda I) = 0$, onde I É A MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n.
- AUTOVETOR DA MATRIZ **A**, ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_i : SÃO AS SOLUÇÕES NÃO-TRIVIAIS DO SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR HOMOGÊNEO : $A\xi_i = \lambda_i \xi_i$ (ou $[A - \lambda_i I]\,\xi_i = 0$), ONDE ξ_i SÃO AS INCÓGNITAS DO SISTEMA E I É A MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n.
- AUTOVETOR GENERALIZADO DA MATRIZ **A**, ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_i DE MULTIPLICIDADE 2: SÃO AS SOLUÇÕES NÃO-TRIVIAIS DO SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NÃO-HOMOGÊNEO : $(A - \lambda_i I)\,\eta_i = \xi_i$, ONDE η_i SÃO AS INCÓGNITAS DO SISTEMA, ξ_i É UM AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_i E I É A MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n.

4.2 SISTEMAS NÃO HOMOGÊNEOS

FORMA GERAL: $X' = Ax + g(t)$

SOLUÇÃO GERAL: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$, onde $x_H(t)$ É A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA HOMOGÊNEO ASSOCIADO E $x_P(t)$ É UMA SOLUÇÃO PARTICULAR DO SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO.

4.2.1 MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS (VÁLIDO SE $g(t)$ É EXPONENCIAL, SENO, COSSENO, POLINÔMIO, OU SOMA OU PRODUTO DE TAIS FUNÇÕES)

→ O PROCEDIMENTO É ESSENCIALMENTE O MESMO DA SEÇÃO **3B1**. ABAIXO É DISCUTIDO APENAS AS DIFERENÇAS.

→ AGORA, MULTIPLICANDO AS FUNÇÕES TEMOS VETORES (DE DIMENSÃO $n \times 1$) CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

→ CASO HAJA NECESSIDADE DE MULTIPLICAR A FUNÇÃO POR "t", A FUNÇÃO ORIGINAL (sem o produto por "t") DEVE SER MANTIDA. EXEMPLOS:

Ⓐ SE $g(t) = \mathbf{u} e^{\lambda t}$, ONDE λ É AUTOVALOR DA MATRIZ A, EM VEZ DE SUPOR UMA $x_P(t)$ DA FORMA $\mathbf{a} t e^{\lambda t}$, É PRECISO SUPOR UMA $x_P(t)$ DA FORMA $\mathbf{a} t e^{\lambda t} + \mathbf{b} e^{\lambda t}$, ONDE $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ SÃO VETORES DE DIMENSÃO $n \times 1$ CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

Ⓑ SE $g(t) = \mathbf{u} t$ e $\lambda = 0$ FOR AUTOVALOR DA MATRIZ A, EM VEZ DE SUPOR UMA $x_P(t)$ DA FORMA $(\mathbf{a} t + \mathbf{b}) \cdot t$, É PRECISO SUPOR UMA $x_P(t)$ DA FORMA $\mathbf{a} t^2 + \mathbf{b} t + \mathbf{c}$, ONDE $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ SÃO VETORES DE DIMENSÃO $n \times 1$ CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

Ⓒ SE $g(t) = \mathbf{u} \cos(\beta t)$ E $\lambda = j\beta$ FOR AUTOVALOR DA MATRIZ A, EM VEZ DE SUPOR UMA $x_P(t)$ DA FORMA $[\mathbf{a} \operatorname{sen}(\beta t) + \mathbf{b} \cos(\beta t)] t$, É PRECISO SUPOR UMA $x_P(t)$ DA FORMA $[\mathbf{a} t \operatorname{sen}(\beta t) + \mathbf{b} t \cos(\beta t) + \mathbf{c} \operatorname{sen}(\beta t) + \mathbf{d} \cos(\beta t)]$, ONDE $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ SÃO VETORES $(n \times 1)$ CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

4.2.2 VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

$x_P(t) = \Psi(t) \mu(t)$, ONDE:

→ $\Psi(t)$ É UMA MATRIZ $n \times n$, SENDO QUE CADA COLUNA DE $\Psi(t)$ CONTÉM UMA SOLUÇÃO l.i. DO SISTEMA HOMOGÊNEO ASSOCIADO.

→ $\mu(t)$ É UM VETOR $n \times 1$, QUE DEVE SATISFAZER AO SEGUINTE SISTEMA ALGÉBRICO: $\boxed{\Psi(t) \mu'(t) = g(t)}$, ONDE $\mu'(t) = \dfrac{d\mu(t)}{dt}$