TÓPICO 1: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

QUALQUER EQUAÇÃO A SER ESTUDADA NO TÓPICO 1 PODE SER REESCRITA NA SEGUINTE FORMA GERAL: $y' = f(t, y)$, ONDE:

- t É A VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- f indica um operador matemático qualquer;
- y É A VARIÁVEL DEPENDENTE;
- y' INDICA $\frac{dy}{dt}$, OU SEJA, A DERIVADA PRIMEIRA DA VARIÁVEL DEPENDENTE (y) EM RELAÇÃO À VARIÁVEL INDEPENDENTE (t).

AS EQUAÇÕES DO TÓPICO 1 SÃO:

- DIFERENCIAIS, POIS ENVOLVEM (MANIPULAM) A DERIVADA DA VARIÁVEL DEPENDENTE EM RELAÇÃO À VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- ORDINÁRIAS, POIS HÁ UMA ÚNICA VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- DE PRIMEIRA ORDEM, POIS MANIPULAM APENAS A DERIVADA PRIMEIRA DA VARIÁVEL DEPENDENTE EM RELAÇÃO À VAR. INDEPENDENTE.

NO TÓPICO 1, NOSSO OBJETIVO É RESOLVER DOIS ENUNCIADOS:

ENUNCIADO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL. A SOLUÇÃO GERAL É A EXPRESSÃO MATEMÁTICA QUE CONTÉM TODAS AS INFINITAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL. NO TÓPICO 1, A SOLUÇÃO GERAL SEMPRE UTILIZARÁ UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA (c) E, PARA QUALQUER VALOR NUMÉRICO DESTA CONSTANTE c, TEM-SE UMA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL. POR SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, ENTENDE-SE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA (OU SEJA, EQUAÇÃO SEM DERIVADA), QUE MANIPULE y e t, E QUE SATISFAÇA A IGUALDADE IMPOSTA PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

ENUNCIADO 2: OBTER A SOLUÇÃO ÚNICA DE UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL (P.V.I). UM PVI SERÁ COMPOSTO DE UMA EQUAÇÃO [redacted] QUE SE ENQUADRA NO TÓPICO 1 E UMA CONDIÇÃO INICIAL (C.I). A SOLUÇÃO ÚNICA DO PVI É DADA PELA SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, ONDE A CONSTANTE ARBITRÁRIA c É SUBSTITUÍDA POR UM VALOR NUMÉRICO QUE SATISFAÇA A C.I.

NÃO EXISTE UM MÉTODO QUE PERMITA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE QUALQUER EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE 1ª ORDEM. O QUE EXISTE SÃO MÉTODOS QUE PERMITEM OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE DETERMINADOS SUBCONJUNTOS DESTAS EQUAÇÕES. NO TÓPICO 1, ESTUDAREMOS MÉTODOS PARA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE 4 SUBCONJUNTOS:

1.1. EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES
1.2. EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES VARIÁVEIS
1.3. EQUAÇÕES SEPARÁVEIS (1.3.1. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS)
1.4. EQUAÇÕES EXATAS (1.4.1. EQUAÇÕES QUE PODEM SER TRANSFORMADAS EM EXATAS)

1.1. EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 1 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{y' + ay = b}$, ONDE a e b INDICAM CONSTANTES QUE NÃO DEPENDEM NEM DE t E NEM DE y.

DEDUÇÃO DA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL POR INTEGRAÇÃO DIRETA:

SEJA: $\frac{dy}{dt} + ay = b$, QUE PODE SER REARRANJADA COMO:

$\frac{dy}{dt} = -ay + b$. MULTIPLICANDO DO LADO DIREITO POR: $\frac{-1/a}{-1/a}$,

TEM-SE: $\frac{dy}{dt} = \frac{1 \cdot y - (b/a)}{(-1/a)}$. DEIXANDO SOMENTE y DO LADO ESQUERDO E SOMENTE t DO LADO DIREITO,

ENTÃO: $\frac{dy}{y-(b/a)} = \frac{dt}{(-1/a)}$. INTEGRANDO AMBOS OS LADOS,

OBTÉM-SE: $\int \frac{dy}{y-(b/a)} = \int \frac{dt}{(-1/a)}$. SABENDO QUE: $\int \frac{dt}{-1/a} = \frac{1}{-1/a}\int 1 \cdot dt = \frac{1}{-1/a}\left(t + c_2\right)$, onde c_2 é uma constante arbitrária

$\begin{cases} u = y-(b/a) \\ \frac{du}{dy} = 1 \end{cases}$, por substituição: $\int \frac{dy}{y-(b/a)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c_1 = \ln|y-(b/a)| + c_1$,

onde c_1 é uma constante arbitrária

PORTANTO: $\ln|y-(b/a)| + c_1 = \frac{1}{-1/a}(t + c_2)$. COMO c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS, PODE-SE SIMPLIFICAR,

CHEGANDO A: $\ln|y-(b/a)| = -at + c_3$, ONDE c_3 É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA ($c_3 = -ac_2 - c_1$). APLICANDO exp EM

AMBOS OS LADOS: $\exp\left[\ln|y-(b/a)|\right] = \exp\left[-at + c_3\right]$, QUE SE SIMPLIFICA EM:

$|y-(b/a)| = \exp(-at)\exp(c_3)$. SABENDO QUE $|y-(b/a)| = \pm [y-(b/a)]$ E QUE c_3 É ARBITRÁRIO, PODE-SE

SIMPLIFICAR PARA: $y-(b/a) = c\exp(-at)$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA ($c = \pm \exp(c_3)$). ISOLANDO,

TEM-SE: $\boxed{y = c\exp(-at) + \frac{b}{a}}$, FINALIZANDO A DEDUÇÃO.

REGRA PRÁTICA:

FORMA GERAL 1.1: $\boxed{y' + ay = b}$ $\Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL POR INTEGRAÇÃO DIRETA: $\boxed{y = c\exp(-at) + \frac{b}{a}}$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$4y' + 1y + 7 = 0$$

RESOLUÇÃO: REESCREVENDO NA FORMA GERAL 1.1, TEM-SE: $1 \cdot y' + \frac{1}{4}y = -\frac{7}{4}$. PORTANTO, $a = \frac{1}{4}$ E $b = -\frac{7}{4}$.

A SOLUÇÃO GERAL É: $y = c\exp\left(\frac{-1}{4}t\right) + \frac{(-7/4)}{(1/4)} = c\exp\left(-\frac{1}{4}t\right) - 7$

EXERCÍCIO 2: OBTER A SOLUÇÃO ÚNICA DO SEGUINTE PVI: $\begin{cases} 4y' + 1y + 7 = 0 \\ y(3) = 17 \end{cases}$

RESOLUÇÃO: (A) OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PRESENTE NO ENUNCIADO. NESSE CASO, A SOLUÇÃO GERAL É: $y = c\exp\left(\frac{-1}{4}t\right) - 7$

(B) IMPOR A C.I. DADA NO ENUNCIADO NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA NO PASSO (A). ISSO RESULTARÁ EM UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA NA INCÓGNITA c. RESOLVER A EQUAÇÃO ALGÉBRICA, OBTENDO O VALOR DA CONSTANTE c QUE SATISFAZ A C.I.

$$y(3) = 17 = c \cdot \exp\left(\frac{-1}{4} \cdot 3\right) - 7 \Rightarrow 17 = c\exp\left(\frac{-3}{4}\right) - 7 \Rightarrow 17 + 7 = 24 = c\exp\left(\frac{-3}{4}\right) \Rightarrow c = \frac{24}{\exp(-3/4)} = 24\exp\left(\frac{+3}{4}\right)$$

(C) A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I. É A EXPRESSÃO DA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA NO PASSO (A), ONDE A CONSTANTE ARBITRÁRIA É SUBSTITUÍDA PELO VALOR NUMÉRICO OBTIDO NO PASSO (B).

RESPOSTA FINAL: A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I É: $\boxed{y = 24\exp\left(\frac{+3}{4}\right)\exp\left(\frac{-1}{4}t\right) - 7}$

1.2. EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES VARIÁVEIS: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 1 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{y' + p(t)y = g(t)}$, ONDE $p(t)$ E $g(t)$ INDICAM FUNÇÕES QUE DEPENDEM DA VARIÁVEL INDEPENDENTE t.

DEDUÇÃO DA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL USANDO FATOR INTEGRANTE:

A LÓGICA AQUI É ENCONTRAR UMA FUNÇÃO $\mu(t)$, CHAMADA DE FATOR INTEGRANTE E QUE DEPENDE DA VARIÁVEL INDEPENDENTE, QUE, AO MULTIPLICAR AMBOS OS LADOS DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, FORNECE DO LADO ESQUERDO A DERIVADA DO PRODUTO ENTRE y E μ, OU SEJA: $\frac{d}{dt}\left[y(t)\mu(t)\right]$. CUMPRE RESSALTAR QUE y DEPENDE DE t $[y(t)]$.

DESSA FORMA, $\mu(t)$ DEVE OBEDECER A: $\frac{d}{dt}\left[y(t)\mu(t)\right] = \frac{dy(t)}{dt}\mu(t) + y(t)\cdot\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)\underbrace{\left[y' + p(t)y\right]}_{\text{LADO ESQUERDO DA EQUAÇÃO ORIGINAL}}$

COMO $\frac{d}{dt}y(t)\mu(t) = \mu(t)y'$, então a condição simplifica para: $\boxed{\mu' = p(t)\mu}$, ONDE $\mu' = \frac{d\mu(t)}{dt}$.

EM OUTRAS PALAVRAS, BUSCA-SE ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO QUALQUER $\mu(t)$ DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL $\boxed{\mu' = p(t)\mu}$. PARA ISSO, INICIALMENTE ASSUME-SE QUE $\mu(t) > 0$. ENTÃO, PELA REGRA DA CADEIA: $\frac{d}{dt}\left[\ln|\mu(t)|\right] = \frac{d}{d\mu}\left[\ln|\mu|\right]\cdot\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\mu(t)}\cdot\mu'(t)$

PORTANTO: $\frac{\mu'}{\mu} = p(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln|\mu(t)|\right] = p(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln(\mu(t))\right] = p(t)$

(COMO $\mu(t) > 0$, $|\mu(t)| = \mu(t)$)

INTEGRANDO AMBOS OS LADOS EM RELAÇÃO A t $\Rightarrow \int\left\{\frac{d}{dt}\ln\left[\mu(t)\right]\right\}dt = \int p(t)\,dt$. CONSIDERANDO QUE DERIVAR E INTEGRAR SÃO OPERADORES UM INVERSO DO OUTRO, ENTÃO $\Rightarrow \ln\left[\mu(t)\right] + C_0 = \int p(t)\,dt$, ONDE C_0 É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

COMO DESEJA-SE APENAS 1 SOLUÇÃO, C_0 PODE ASSUMIR QUALQUER VALOR NUMÉRICO. PARA SIMPLIFICAR, FAZ-SE $\boxed{C_0 = 0}$.

ISSO RESULTA EM: $\ln\left[\mu(t)\right] = \int p(t)\,dt \Rightarrow \exp\left\{\ln\left[\mu(t)\right]\right\} = \exp\left[\int p(t)\,dt\right] \Rightarrow \mu(t) = \exp\left[\int p(t)\,dt\right]$. COMO $\exp(x)$ É SEMPRE POSITIVO, A HIPÓTESE $\mu(t) > 0$ É SEMPRE VERDADEIRA.

CONHECIDO $\mu(t)$, VOLTA-SE A EQUAÇÃO ORIGINAL E MULTIPLICA-SE POR $\mu(t)$, OU SEJA: $\underbrace{\mu(t)\left[y' + p(t)y\right]}_{\frac{d}{dt}\left[y\cdot\mu(t)\right]} = \mu(t)g(t)$.

INTEGRANDO EM RELAÇÃO A t: $\int\left\{\frac{d}{dt}\left[y\cdot\mu(t)\right]\right\}dt = \int\mu(t)g(t)\,dt \Rightarrow \left[y\cdot\mu\right] + C_1 = \int\mu(t)g(t)\,dt$

$y = \frac{\left[\int\mu(t)g(t)\,dt\right] + C}{\mu}$, ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA ($C = -C_1$) ONDE C_1 É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

REGRA PRÁTICA:

FORMA GERAL 1.2: $y' + p(t)\,y = g(t)$ $\Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL POR FATOR INTEGRANTE $y = \dfrac{\left[\int \mu(t) g(t)\,dt\right] + c}{\mu(t)}$, ONDE $\mu(t) = \exp\left[\int p(t)\,dt\right]$ E ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $ty' + 2y = 4t^2$

REESCREVENDO: $y' + \frac{2}{t}y = 4t$, ENTÃO: $p(t) = \frac{2}{t}$ E $g(t) = 4t$. ASSIM, $\mu(t) = \exp\left[\int \frac{2}{t}\,dt\right]$

$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + \cancel{c_1}^{\,0}$ ($c_1 = 0$ POIS BASTA OBTER UMA ÚNICA $\mu(t)$) $\Rightarrow \mu(t) = \exp\left\{2\left[\int \frac{1}{t}\,dt\right]\right\} = \exp\left\{2 \cdot \ln|t|\right\} = \exp\left\{\ln|t|^2\right\} = \exp\left\{\ln t^2\right\} = t^2$

DESSA FORMA: $\int \mu(t) g(t)\,dt = \int t^2 \cdot 4t\,dt = 4\int t^3\,dt = 4\left[\frac{t^4}{4}\right] = t^4$

PORTANTO, A SOLUÇÃO GERAL É: $y = \dfrac{t^4 + c}{t^2}$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

EXERCÍCIO 2: OBTER A SOLUÇÃO ÚNICA DO SEGUINTE PVI: $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

RESOLUÇÃO: (A) OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL $\Rightarrow$ JÁ FEITO $\Rightarrow y = \dfrac{t^4 + c}{t^2}$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

(B) IMPOR A C.I. NA SOLUÇÃO GERAL DE (A):

$y(1) = 2 = \dfrac{1^4 + c}{1^2}$ ($t = 1$) $\Rightarrow$ A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ALGÉBRICA É $c = 1$.

(C) A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I É A EXPRESSÃO DA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA NO PASSO (A), ONDE A CONSTANTE ARBITRÁRIA É SUBSTITUÍDA PELO VALOR NUMÉRICO OBTIDO NO PASSO (B).

RESPOSTA FINAL: A SOLUÇÃO ÚNICA DO PVI É: $\boxed{y = \dfrac{t^4 + 1}{t^2}}$

1.3. EQUAÇÕES SEPARÁVEIS: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 1 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{M(t) + N(y)\,y' = 0}$, ONDE $M(t)$ INDICA UMA FUNÇÃO QUE DEPENDE APENAS DE t E $N(y)$ INDICA UMA FUNÇÃO QUE DEPENDE APENAS DE y.

DEDUÇÃO DA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL:

SEJAM $H_1(t)$ e $H_2(t)$ AS PRIMITIVAS DE $M(t)$ E $N(y)$, RESPECTIVAMENTE. OU SEJA:

$$H_1'(t) = \frac{d}{dt}H_1(t) = M(t) \qquad e \qquad H_2'(y) = \frac{d}{dy}H_2(y) = N(y).$$

A EQUAÇÃO SEPARÁVEL PODE SER REESCRITA COMO:

$$H_1'(t) + H_2'(y)\,y' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}H_1(t) + \left[\frac{d}{dy}H_2(y)\right]\left[\frac{dy}{dt}\right] = 0.$$

PELA REGRA DA CADEIA: $\frac{d}{dt}\left\{H_2[y(t)]\right\} = \left[\frac{d}{dy}H_2(y)\right]\cdot\frac{dy}{dt}$. PORTANTO:

$$\frac{d}{dt}H_1(t) + \frac{d}{dt}\left[H_2(y)\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[H_1(t) + H_2(y)\right] = 0.$$ INTEGRANDO AMBOS OS LADOS EM RELAÇÃO A t:

$$\int\left\{\frac{d}{dt}\left[H_1(t) + H_2(y)\right]dt = \int 0\cdot dt\right.$$. COMO INTEGRAR E DERIVAR SÃO OPERADORES UM INVERSO DO OUTRO,

ENTÃO: $H_1(t) + H_2(y) = c$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA, FINALIZANDO A DEDUÇÃO.

REGRA PRÁTICA:

FORMA GERAL 1.3: $\boxed{M(t) + N(y)\,y' = 0}$ $\Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL: $H_1(t) + H_2(y) = c$, ONDE: $\begin{cases} c \text{ é uma constante arbitrária} \\ H_1'(t) = M(t) \\ H_2'(y) = N(y) \end{cases}$

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1-y^2}$

REESCREVENDO: $(1-y^2)\frac{dy}{dt} = t^2 \Rightarrow -t^2 + (1-y^2)\frac{dy}{dt} = 0$. ENTÃO: $M(t) = -t^2$ E $N(y) = 1-y^2$.

A SOLUÇÃO GERAL É: $H_1(t) + H_2(y) = c$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

ONDE: $H_1'(t) = M(t) \Rightarrow \int \frac{dH_1(t)}{dt}\,dt = \int M(t)\,dt \Rightarrow H_1(t) = \int M(t)\,dt = \int -t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}$

(OBSERVAÇÃO: AQUI A CONSTANTE ARBITRÁRIA FOI IGUALADA A ZERO POIS JÁ HÁ UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA NA SOLUÇÃO GERAL)

$H_2'(y) = N(y) \Rightarrow \int \frac{d}{dy}H_2(y)\,dy = \int N(y)\,dy \Rightarrow H_2(y) = \int N(y)\,dy = \int (1-y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3}$

PORTANTO, A SOLUÇÃO GERAL É: $\boxed{\frac{-t^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} = c}$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

EXERCÍCIO 2: OBTER A SOLUÇÃO ÚNICA DO SEGUINTE PVI: $\begin{cases} y' = \frac{t^2}{1-y^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

RESOLUÇÃO: (A) SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL: $\boxed{\frac{-t^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} = c}$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

(B) IMPOR A C.I. NA SOLUÇÃO GERAL:

$$-\frac{0^3}{3} + 2 - \frac{2^3}{3} = c \Rightarrow c = 0 + 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

(C) A SOLUÇÃO ÚNICA DO PVI É: $\boxed{\frac{-t^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} = -\frac{2}{3}}$

1.3.1. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 1 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{t}\right)}$. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS PODEM SER TRANSFORMADAS EM EQUAÇÕES SEPARÁVEIS PELA MUDANÇA DE VARIÁVEL: $v = y/t$.

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $\frac{dy}{dt} = \frac{y - 4t}{t - y}$

REARRANJANDO A EQUAÇÃO: $\frac{dy}{dt} = \frac{(y - 4t)\cdot\frac{1}{t}}{(t - y)\cdot\frac{1}{t}} = \frac{\frac{y}{t} - 4}{1 - \frac{y}{t}} = f\left(\frac{y}{t}\right)$, PORTANTO A EQUAÇÃO É HOMOGÊNEA.

FAZENDO A MUDANÇA DE VARIÁVEL $\boxed{v = y/t}$ $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{y(t)}{t}\right] = \frac{y't - y}{t^2} \Rightarrow v' = \frac{y't - y}{t^2} \Rightarrow t^2 v' = y't - y$

$t^2 v' + y = y't \Rightarrow tv' + \frac{y}{t} = y' \Rightarrow y' = tv' + v$

SUBSTITUINDO y e y' NA EQUAÇÃO ORIGINAL: $tv' + v = \frac{v - 4}{1 - v} \Rightarrow tv' = -v + \left(\frac{v - 4}{1 - v}\right) \Rightarrow tv' = \frac{-v + v^2 + v - 4}{1 - v} \Rightarrow$

$tv' = \frac{v^2 - 4}{1 - v} \Rightarrow \left(\frac{1 - v}{v^2 - 4}\right)v' = \frac{1}{t} \Rightarrow -\frac{1}{t} + \left(\frac{1 - v}{v^2 - 4}\right)v' = 0$

PORTANTO, A EQUAÇÃO COM A VARIÁVEL DEPENDENTE v É SEPARÁVEL COM: $\boxed{M(t) = -\frac{1}{t}}$ E $\boxed{N(v) = \frac{1 - v}{v^2 - 4}}$

A SOLUÇÃO GERAL DESTA EQUAÇÃO É:

$H_1(t) + H_2(v) = C$, onde C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO DA PÁGINA ANTERIOR:

ONDE $H_1'(t) = M(t) \Rightarrow H_1(t) = \int M(t)\,dt = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t|$

$H_2'(v) = N(v) = H_2(v) = \int N(v)\,dv = \int \left[\frac{1-v}{v^2-4}\right] dv$

EXPANDINDO EM FRAÇÕES PARCIAIS: $\frac{1-v}{v^2-4} = \frac{1-v}{(v-2)(v+2)} = \frac{A}{(v-2)} + \frac{B}{(v+2)} = \frac{A(v+2)+B(v-2)}{(v-2)(v+2)} = \frac{v(A+B)+(2A-2B)}{(v-2)(v+2)}$ ($A+B=-1$, $2A-2B=1$)

$\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{4}\ ;\ B=-\frac{3}{4}$. PORTANTO: $\frac{1-v}{v^2-4} = \frac{(-1/4)}{v-2} + \frac{(-3/4)}{v+2}$

$H_2(v) = \int \frac{-1/4}{v-2}\,dv + \int \frac{-3/4}{v+2}\,dv \Rightarrow$ por substituição

$w = v-2 \quad \frac{dw}{dv} = 1$

$z = v+2 \quad \frac{dz}{dv} = 1$

$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{v-2}\,dv = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{w}\,dw = -\frac{1}{4}\ln|w| = \frac{1}{4}\ln|v-2|$

$-\frac{3}{4}\int \frac{1}{v+2}\,dv = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{z}\,dz = -\frac{3}{4}\ln|z| = -\frac{3}{4}\ln|v+2|$

$H_2(v) = -\frac{1}{4}\ln|v-2| - \frac{3}{4}\ln|v+2|$

Portanto: $H_1(t)+H_2(v) = C \Rightarrow \boxed{-\ln|t| - \frac{1}{4}\ln|v-2| - \frac{3}{4}\ln|v+2| = C}$

Voltando para a variável $y \Rightarrow \boxed{-\ln|t| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{t}-2\right| - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{y}{t}+2\right| = C}$ ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

1.4. EQUAÇÕES EXATAS

QUALQUER EQUAÇÃO DESTE TÓPICO 1 PODE SER REESCRITA NA SEGUINTE FORMA GERAL ALTERNATIVA: $M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0$,
ONDE $M(t,y)$ E $N(t,y)$ SÃO FUNÇÕES QUAISQUER DAS VARIÁVEIS DEPENDENTE (y) E INDEPENDENTE (t).
EQUAÇÕES EXATAS SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 1 QUE SATISFAZEM: $\frac{\partial}{\partial y} M(t,y) = M_y = N_t = \frac{\partial}{\partial t} N(t,y)$

DEDUÇÃO DA OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL:

SUPONHA QUE EXISTE UMA FUNÇÃO $\psi(t,y)$ TAL QUE:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y) \quad \text{E} \quad \frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y) = N(t,y)$$

SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO DIFERENCIAL: $\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) + \left[\frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y)\right]\frac{dy}{dt} = 0$

PELA REGRA DA CADEIA: $\frac{d}{dt}\left\{\psi[t,y(t)]\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\partial}{\partial y}\psi \cdot \frac{dy}{dt}$

ENTÃO: $\frac{d}{dt}\left\{\psi[t,y(t)]\right\} = 0$

INTEGRANDO AMBOS OS LADOS EM RELAÇÃO À t:

$$\int \frac{d}{dt}\left\{\psi[t,y(t)]\right\}dt = \int 0 \cdot dt$$

$\psi(t,y) = c$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA, FINALIZANDO A DEDUÇÃO.

REGRA PRÁTICA:

Se $M_y(t,y) = N_t(t,y)$ $\Rightarrow$ EQUAÇÃO É EXATA E SOLUÇÃO GERAL É: $\Rightarrow \psi(t,y) = c$, ONDE: $\begin{cases} c \text{ É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA} \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y) \;;\; \frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y) = N(t,y) \end{cases}$

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $2t + y^2 + 2tyy' = 0$

TEM-SE: $\boxed{M(t,y) = 2t + y^2}$ E $\boxed{N(t,y) = 2ty}$ $\Rightarrow M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0$

CALCULANDO:
$$\left.\begin{aligned} My &= \frac{\partial}{\partial y} M(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2t + y^2\right] = 0 + 2y \\ Nt &= \frac{\partial}{\partial t} N(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\left[2ty\right] = 2y \end{aligned}\right\}$$ COMO $Nt = My$, CONFIRMA-SE QUE A EQUAÇÃO É EXATA

PORTANTO, A SOLUÇÃO GERAL É: $\boxed{\psi(t,y) = C}$, ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

OBTENDO $\psi(t,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y) \Rightarrow \int\left[\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y)\right]dt = \int M(t,y)\,dt \Rightarrow \psi(t,y) = \int M(t,y)\,dt = \int (2t+y^2)\,dt$$

$$\psi(t,y) = \int 2t\,dt + \int y^2\,dt = 2\int t\,dt + y^2\int 1\cdot dt = 2\frac{t^2}{2} + y^2 t + g(y) = t^2 + y^2 t + g(y),$$ ONDE $g(y)$ É UMA FUNÇÃO ARBITRÁRIA DE y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[t^2 + y^2 t + g(y)\right] = N(t,y) = 2ty \Rightarrow 0 + 2ty + g'(y) = 2ty \Rightarrow \boxed{g'(y) = 0}$$

BASTA OBTER UMA SOLUÇÃO QUALQUER PARA $g'(y) = 0$. NESSE CASO, $g(y)$ PODE SER QUALQUER VALOR NUMÉRICO, POR EXEMPLO, $\boxed{g(y) = 0}$, UMA VEZ QUE $g'(y) = \frac{d}{dy}\left[\begin{matrix}\text{constante}\\ \text{qualquer}\end{matrix}\right] = 0$

RESPOSTA: A SOLUÇÃO GERAL É: $\boxed{t^2 + y^2 t = C}$, ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

1.4.1. O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 1 ONDE $\boxed{\frac{My - Nt}{N} = h(t)}$, SENDO $h(t)$ UMA FUNÇÃO QUALQUER EM t, PODEM SER TRANSFORMADAS EM EQUAÇÕES EXATAS PELA MULTIPLICAÇÃO PELO FATOR INTEGRANTE $\mu(t)$, ONDE $\mu(t)$ É UMA SOLUÇÃO QUALQUER DE $\boxed{\mu'(t) = h(t)\,\mu(t)}$

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $(3ty + y^2) + (t^2 + ty)y' = 0$

INICIALMENTE VERIFICANDO SE A EQUAÇÃO É EXATA:

$$My = \frac{d}{dy}\left[3ty + y^2\right] = 3t + 2y$$

$$Nt = \frac{d}{dt}\left[t^2 + ty\right] = 2t + y$$

COMO $My \neq Nt$, A EQUAÇÃO NÃO É EXATA.

CALCULANDO: $\frac{My - Nt}{N} = \frac{3t + 2y - (2t + y)}{t^2 + ty} = \frac{(t + y)}{t(t + y)} = \boxed{\frac{1}{t}}$. COMO O RESULTADO DE $\frac{My - Nt}{N}$ SÓ DEPENDE DE t [E NÃO DEPENDE DE y], É POSSÍVEL TRANSFORMAR EM EXATA USANDO $\boxed{1.4.1}$ COM $h(t) = \frac{1}{t}$.

OBTENDO O FATOR INTEGRANTE $\mu(t)$:

$$\mu'(t) = h(t)\,\mu(t) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \cdot u \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$$

$\Rightarrow$ BASTA OBTER UMA SOLUÇÃO $\mu(t)$ QUE SATISFAÇA ESSA EQUAÇÃO DIFERENCIAL. NESSE EXEMPLO, $\boxed{u = t}$ É UMA SOLUÇÃO.

MULTIPLICANDO A EQUAÇÃO ORIGINAL POR $\mu(t)$: $t\left[3ty + y^2\right] + t\left[t^2 + ty\right]y' = t \cdot 0$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO DA PÁGINA ANTERIOR:

$$\left[3t^2y + ty^2\right] + \left[t^3 + t^2y\right] y' = 0$$

VERIFICANDO SE É EXATA:

$$M_y = \frac{d}{dy}\left[3t^2y + ty^2\right] = 3t^2 + 2ty$$

$$N_t = \frac{d}{dt}\left[t^3 + t^2y\right] = 3t^2 + 2ty$$

COMO $M_y = N_t$, A EQUAÇÃO É EXATA

SOLUÇÃO GERAL É: $\psi(t,y) = C$, ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

OBTENDO $\psi(t,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,y) = M(t,y) \Rightarrow \psi(t,y) = \int M(t,y)\,dy = \int\left[3t^2y + ty^2\right]dt = 3y\int t^2dt + y^2\int t\,dt = yt^3 + \frac{y^2t^2}{2} + g(y),$$

ONDE $g(y)$ É UMA FUNÇÃO ARBITRÁRIA DE y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[yt^3 + \frac{y^2t^2}{2} + g(y)\right] = N(t,y) = t^3 + t^2y \Rightarrow t^3 + t^2y + g'(y) = t^3 + t^2y \Rightarrow \boxed{g'(y) = 0}$$

BASTA OBTER UMA SOLUÇÃO QUALQUER PARA $g'(y) = 0$. ESCOLHE-SE $g(y) = 0$

Resposta: A SOLUÇÃO GERAL É: $\boxed{yt^3 + \frac{y^2t^2}{2} = C}$, ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA