ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 6

Autovalores e autovetores

Autovalores e autovetores

Até aqui resolvemos equações do tipo $Ax = b$

Agora vamos resolver um novo tipo de equações, as que são do tipo $\boxed{Ax = \lambda x}$ em que a matriz A é quadrada (a teoria a seguir não se aplica a matrizes retangulares) e o vetor resultante λx é paralelo ao vetor original x

Temos que resolver este tipo de equação

Ao fazer isto não podemos aplicar o método de eliminação de Gauss pois agora temos duas incógnitas (λ e x)

Vamos falar de algumas matrizes e ver se conseguimos identificar seus autovalores e autovetores.

Vamos começar com o exemplo da matriz projeção P

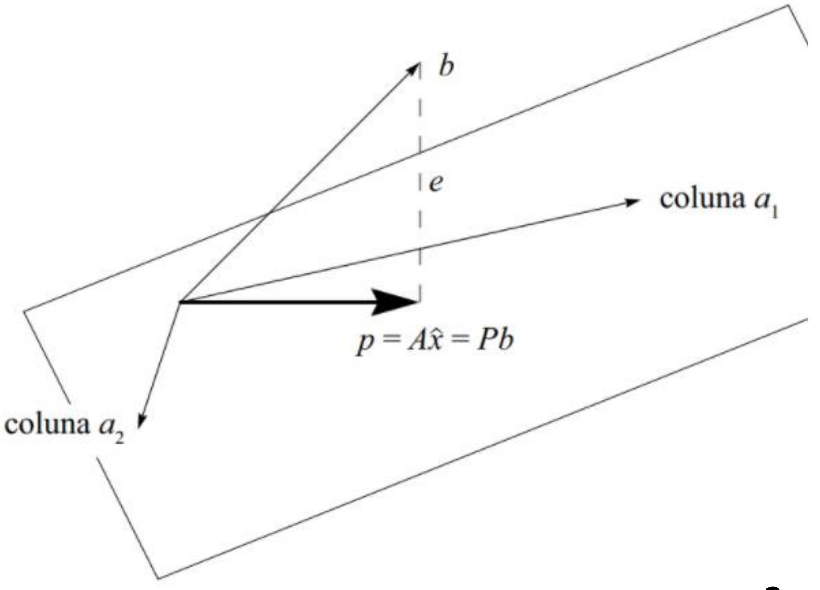
Quais são os autovetores e autovalores de P?

b é um autovetor de P?

b não é um autovetor pois Pb não é paralelo a b!

Quais vetores são paralelos após operar com P?

São os vetores x (ou p) que já estão no plano!.. teremos:



$Px=x$ ...neste caso $\lambda=1$

Autovalores e autovetores

Mas temos outros autovetores além dos que estão no plano
São os perpendiculares, pois sua projeção é zero (que é um vetor muito particular e em certo sentido considerado paralelo a todo vetor)...portanto a resposta completa sobre os autovetores da matriz projeção P é:

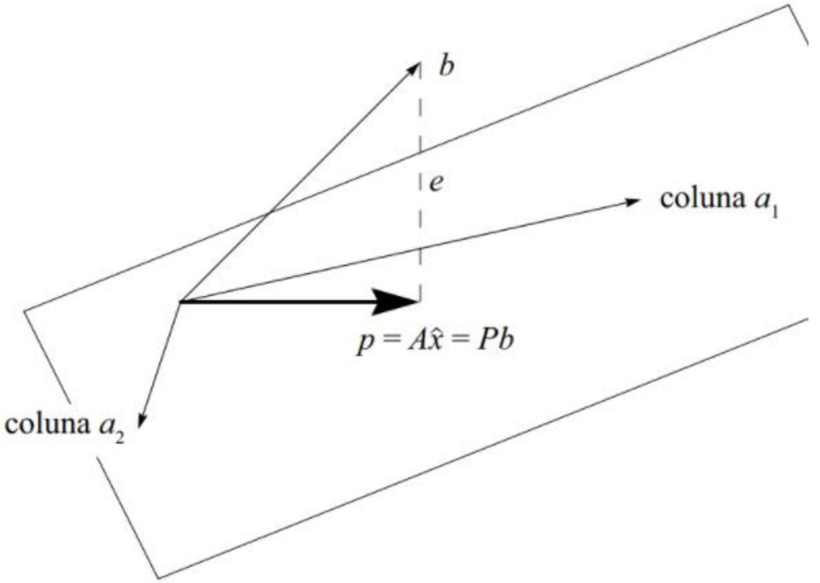
Todos os vetores x que estão no plano para os quais: $Px=x$ e $\lambda=1$
Todos os vetores x $\perp$ ao plano para os quais: $Px=0x$ e $\lambda=0$

Desta forma temos 3 autovetores bons (independentes), dois no plano e um fora do plano (perpendicular ao plano).

EXEMPLO 1: Vamos ver um segundo exemplo... O caso da matriz permutação...

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria um autovetor desta matriz?



Autovalores e autovetores

Um autovetor seria $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pois: $Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e **λ =1**

Mas como a matriz é bidimensional, deve haver um segundo autovalor...

O segundo autovetor seria $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pois: $Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e **λ =-1**

Adiantando alguns fatos dos autovalores (como veremos mais adiante), matrizes nxn tem n autovalores e os autovalores cumprem as condiçãoões

Traço A = soma dos elementos diagonais = $a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ **=** $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

det A = $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$

Vamos agora um procedimento para encontrar estes autovalores e autovetores da matriz A

Para resolver $Ax=\lambda x$ reescrevemos a equação assim:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

(A- λI) é SINGULAR !!!

Um fato que não estudamos mas precisamos aplicar, é que, no caso de matrizes singulares, seu determinante é zero!

Autovalores e autovetores

Vamos lembrar como calcular determinantes de matrizes rapidamente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} +a_{11}a_{22}a_{33} + \boldsymbol{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{matrix}$$

E uma propriedade importante dos determinantes é que:

Todas as matrizes singulares possuem determinante nulo (se A for singular, então det A = 0, se A for invertível, então det A $\neq$ 0).

Aplicando esta propriedade a nossa equação (A-λI)x=0 obtemos a chamada equação característica (ou equação dos autovalores)...

$$\det(A - \lambda I)x = 0$$

Esta equação permite encontrar os autovalores λ (para depois encontrar os autovetores x que formam o espaço nulo dessa matriz A-λI)

Autovalores e autovetores

Vamos resolver este tipo de equações, se possível, pelo método de diagonalização das matrizes (que é uma simplificação).

Vamos ver outro exemplo para mostrar como encontramos os λ primeiro...

EXEMPLO 2:

Suponha a seguinte matriz 2x2 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Vamos resolver a equação...det $(B-\lambda I)x=0$

$$\det(B - \lambda I)\, B = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 4)$$

Portanto os autovalores são $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=2$

Agora podemos calcular os autovalores (que são os vetores do espaço nulo quando fazemos a matriz singular ao deslocar a matriz inicial B pelos valores λ)

Vamos encontrar o autovetor para $\lambda_1 = 4$ primeiro

Nossa matriz (singular) será B-4I ou seja: $B - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Qual é o autovetor x_1 (do espaço nulo) que corresponde ao autovalor $\lambda_1 = 4$ desta matriz?

Autovalores e autovetores

Procuramos pelo vetor x_1 (para λ_1=4) tal que:

$$(B - 4I)x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = 0$$

$$(B - 4I)x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da mesma forma, para λ_2=2 obtemos:

$$(B - 2I)x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = 0$$

$$(B - 2I)x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Portant
o $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autovalores e autovetores

Nos dois últimos exemplos vimos que para:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{obtivemos } \lambda_1 = 1 \text{ com } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e para } \lambda_2 = -1 \text{ obtivemos } x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{obtivemos } \lambda_1 = 4 \text{ com } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e para } \lambda_2 = 2 \text{ obtivemos } x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Há uma propriedade que pode ser vista aqui e que é importante (saber o que acontece com os autovalores e os autovetores quando mudamos as matrizes, como nos dois casos acima)

Vejam que a matriz B é a matriz A mais 3I...

O mesmo valor é adicionado aos autovalores e os autovetores não mudam!

Isto era esperado pois se temos $Ax=\lambda x$ e somamos 3I à matriz A teremos:

$$(A+3I)x = Ax+3Ix = \lambda x+3x = (\lambda+3)x$$

Aqui vemos que os autovalores aumentam em 3 e os autovetores x permanecem os mesmos!

O que acontece se somamos duas matrizes qualquer (C e D) das quais conhecemos os autovalores e autovetores, ou seja $Cx=\lambda x$ e $Dy=\alpha y$....

Autovalores e autovetores

Como os autovetores não são (em geral) os mesmos, não podemos somar os autovalores, ou seja não podemos escrever ~~$(C+D)x=(\lambda+\alpha)x$~~ nem ~~$(C+D)y=(\lambda+\alpha)y$~~

O mesmo se aplica ao produto CD, não podemos multiplicar seus autovalores! (porque os autovetores em geral são diferentes)

Uma exceção é quando somamos múltiplos da matriz identidade I como no ultimo exemplo (B=A+3I) nesse caso so autovetores são os mesmos e podemos somar os autovalores...

Vejamos outro exemplo:

EXEMPLO 3:

Vamos lembrar a matriz rotação em 90^0 que era: $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Vamos encontrar os autovetores e os autovalores desta matriz ortonormal (suas colunas são perpendiculares e estes vetores tem modulo 1)

Sabemos que os autovalores vão somar zero (traço da matriz) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

E sabemos que seu produto vai ser = det Q ou seja $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$

Aqui algo deve estar errado com este exemplo pois a rotação não pode dar um vetor na mesma direção que o original! E portanto não poderíamos ter autovetores nem autovalores!

Vamos calcular estes autovalores e autovetores....

Autovalores e autovetores

Olhando para as duas equações

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

Vemos que algo deve estar errado pois da primeira seque que os autovalores são opostos (um negativo e outro positivo) e da segunda segue que eles têm o mesmo sinal!
Vamos aplicar nosso procedimento....

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Resolvendo obtemos

$$\lambda_1 = i$$
$$\lambda_2 = -i$$

A questão aqui foi a matriz inicial, quando a matriz é simétrica (ou próxima de uma matriz simétrica) tudo vai bem (como nos exemplos 1 e 2) os autovalores são reais mas...
...se nos afastamos das matrizes simétricas e vamos ao caso de matrizes antissimétricas (como no exemplo 3) teremos soluções puramente imaginarias...
No meio (entre simétricas e antissimétricas) teremos todos os outros casos...

Autovalores e autovetores

Para completar os casos onde as matrizes não são tão boas, vamos ver o caso quando temos autovalores repetidos...

EXEMPLO 4:

Vamos supor a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Quais são os autovalores e os autovetores desta matriz?

Como ela é triangular, os autovalores são os que estão na diagonal...por quê?

Vejamos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Resolvendo obtemos $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 3$

O problema com esta matriz não é encontrar os autovalores, o problema são os autovetores!

Estamos procurando por uma par de autovetores x_1 e x_2!

Para encontrar eles fazíamos:

$$(A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = 0$$

Autovalores e autovetores

Qual seria uma base para o espaço nulo de (A-λI)x=0 ? $(A-\lambda I)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = 0$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria o outro autovetor independente?

Não há um segundo autovetor independente...mesmo sendo uma matriz 2x2 temos só um autovetor independente

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 240

Conjunto de problemas 5.1

Resolver: 1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 17, 21, 22, 23, 24, 29, 32, 36, 38, 39

Autovalores e autovetores

Diagonalização de matrizes

Vamos supor que aprendemos a encontrar os autovalores e os autovetores da matriz A agora vamos ver como utilizar eles.

Uma das principais utilidades é que os autovetores permitem diagonalizar uma matriz.

Vamos utilizar eles para obter uma nova forma de fatorar a matriz A...
Vamos começar montando uma matriz chamada S, em que suas colunas são todos os autovetores ($x_{i,j}$) linearmente independentes (LI) da matriz A...

$$S \equiv \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovetores

Agora vamos ver o que acontece quando multiplicamos a matriz A pela matriz S com seus autovetores nas colunas....

$$AS = A\begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{1,1} & \cdots & \lambda_n x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1,n} & \cdots & \lambda_n x_{n,n} \end{bmatrix}$$

...pois $Ax_i=\lambda_i x_i$

Podemos reescrever isso da seguinte forma (separando a multiplicação pelos λ):

$$AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{1,1} & \cdots & \lambda_n x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1,n} & \cdots & \lambda_n x_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = S\Lambda$$

Matriz S de autovetores

Matriz diagonal Λ de autovalores

Portanto: $\boxed{\mathbf{AS=S\Lambda}}$

Autovalores e autovetores

Um fato importante é que a matriz S (quadrada nxn) foi montada com n autovetores independentes da matriz A (por enquanto vamos deixar de lado os poucos casos em que há autovetores repetidos) e portanto....

...ela tem inversa (posto n, n pivôs, n linhas e n colunas LI) e podemos escrever, multiplicando pela esquerda...

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

O que fizemos foi **diagonalizar a matriz A** utilizando a matriz da autovetores S

Podemos também fazer uma nova fatoração da matriz A multiplicando por S^{-1} pela direita...

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

Vamos utilizar estas equações para responder a algumas perguntas, por exemplo quais são os autovalores e os autovetores da matriz $\mathbf{A^2}$?

Para responder vamos multiplicar nossa equação $Ax=\lambda x$ por A novamente e teremos:

$$A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

Autovalores e autovetores

Outra forma de resolver a questão de A^2 é utiliza a equação:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$A^2 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}$$

$$A^2 = S\Lambda^2 S^{-1}$$

Obtivemos o mesmo resultado (ou seja os autovetores são os mesmos, por isso a mesma matriz S, mas os autovalores ficaram ao quadrado)...que generalizado daria: $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

Moral da história: autovalores e autovetores são muito bons para calcular potencias de matrizes...vejamos o seguinte teorema (evidente a partir deste resultado)

Teorema:

$A^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \propto$ se todos os $|\lambda_i|$ (da matriz diagonal Λ) < 1

Reforçando que tudo isto é valido se temos n autovetores LI (senão temos n LI autovetores não podemos diagonalizar a matriz A pois não existiria S^{-1})

Autovalores e autovetores

Vamos responder agora à pergunta sobre quais matrizes podem ser diagonalizadas

Se A tem n autovetores independentes (e portanto é diagonalizavel) então todos os λ são diferentes (sem valores repetidos)

Se temos autovalores repetidos, podemos ou não ter n autovetores independentes.

Por exemplo a matriz identidade....quais são seus autovalores?
São todos unitários...mas que acontece com seus autovetores?
Cada coluna da matriz identidade é um autovetor independente! E portanto a matriz S terá n vetores independentes...
Olhando para a equação $S^{-1}AS = \Lambda$ quando A é a matriz identidade vemos que AS = S e teremos que I=I....
Pois a matriz identidade já é diagonal e portanto já tem seus autovalores na diagonal
E no caso de matrizes triangulares?
Vamos ver um exemplo...para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovetores

Os autovalores de matrizes triangulares estão na diagonal pois se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\,(2-\lambda)$$

E quais são os autovetores?...
Montamos a equação A-λI...e procuramos seu espaço nulo

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Como já vimos, neste caso teremos um único autovetor LI (1,0) e portanto o espaço nulo será unidimensional e não podemos aplicar nosso teorema de A^K ou diagonalizar está matriz triangular.
Vamos aplicar o que aprendemos num exemplo muito comum...quando desejamos resolver equações do tipo: $u_{k+1} = Au_k$ em que u_0 é dado...
Por exemplo u_{100}=?

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 250

Conjunto de problemas 5.2

Resolver: 3; 4; 6; 8; 11; 12; 15; 16; 17; 23; 24; 27; 28; 30; 32; 33; 35; 39; 40; 41

Autovalores e autovetores

Potencias de A^k

Vamos aplicar o que aprendemos num exemplo muito comum...quando desejamos resolver equações do tipo: $u_{k+1} = Au_k$ em que u_0 é dado...Por exemplo u_{100}=?

Sabemos que $u_1 = A\,u_0$ $u_2 = A\,u_1 = A^2\,u_0$ .... $\boxed{u_k = A^k\,u_0}$

...é assim que resolvemos sistemas de equações diferenciais...

...neste caso, como a relação é entre u_{k+1} e u_k as equações são de primeira ordem

Como vimos (slide 17) podemos reescrever $u_k = A^k\,u_0 = S\Lambda^k S^{-1} u_0$

Mas como u_0 pode ser escrito como uma CL dos autovetores da matriz A...

$u_0 = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + ...+ c_n\,x_n = Sc$ então $S^{-1}u_0 = c$ e teremos:

$$u_k = S\Lambda^k c = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n} & \cdots & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k\,x_2 + ...+ c_n\lambda_n^k\,x_n$$

Autovalores e autovetores

No nosso caso queremos achar o u_{100}

O primeiro a ser feito é escrever o vetor inicial (u_0) como CL dos autovetores unitários LI x_i (da matriz A), ou seja escrever:

$$u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = Sc$$

A seguir multiplicamos por Au_0... $\quad Au_0 = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + c_n \lambda_n x_n$

Logo $u_{100} = A^{100} u_0$ será..... $\quad u_{100} = A^{100} u_0 = c_1 \lambda_1^{100} x_1 + c_2 \lambda_2^{100} x_2 + \ldots + c_n \lambda_n^{100} x_n = \Lambda^{100} Sc$

Vamos ver um exemplo concreto.. a série de Fibonacci....

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 5: Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

A regra é: $F_{K+2}=F_{k+1}+F_k$

Quem é F_{100} = ?, vamos resolver...

Esta regra $F_{K+2}=F_{k+1}+F_k$ é uma única equação de segunda ordem (não é um sistema de equações)

Ela tem e pode ser transformada em duas equações de primeira ordem assim...

Definimos um novo vetor u_k de forma que:

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{K+1} \\ F_K \end{bmatrix}$$

Logo completamos a única equação que temos com mais uma (trivial):

$F_{K+2}=F_{k+1}+F_k$

$F_{K+1}=F_{k+1}$

e reescrevemos elas utilizando o vetor u_k

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{K+2} \\ F_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{K+1} \\ F_K \end{bmatrix}$$

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 5: Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Obtivemos nosso sistema de equações de 1 ordem: $u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$

Agora precisamos dos autovalores e autovetores desta matriz!

Como é uma matriz 2 x 2 teremos dois autovalores e dois autovetores, a matriz é simétrica (portanto os autovalores serão reais e seus autovetores serão ortogonais) e ainda sabemos que os autovalores devem cumprir:

Ao somar eles ($\lambda_1 + \lambda_2$) teremos o traço de A = 1

Ao multiplicar eles ($\lambda_1 \lambda_2$) teremos o determinante de A que é -1

Vamos resolver como aprendemos:

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$$

Os autovalores (λ_1 e λ_2) são diferentes assim que teremos dois autovetores (x_1 e x_2) diferentes e portanto a matriz A é diagonalizável.

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 5: Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... $u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$

Os autovalores (λ_1 e λ_2) são diferentes assim que....teremos dois autovetores (x_1 e x_2) diferentes e portanto a matriz A é diagonalizável.

Os autovetores são obtidos do espaço nulo da matriz singular quer se obtêm ao colocar λ_1 e λ_2

$$A - \lambda_i I = \begin{bmatrix} 1-\lambda_i & 1 \\ 1 & -\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1º autovetor

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2º autovetor

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora, para finalmente poder calcular o F_{100} precisamos do u_0 (primeiro elemento da série)

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 5: Fibonacci   0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... $u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$

O primeiro elemento da série (olhar acima) é:

$$u_k \equiv \begin{bmatrix} F_{K+1} \\ F_K \end{bmatrix} \rightarrow u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O que devemos fazer agora?

Vamos lembrar o procedimento...primeiro teremos que escrever o vetor inicial u_0 como uma CL dos autovetores (ver slide 21), que neste caso são dois $u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = Sc$

A seguir multiplicaremos essa CL por A para obter os próximos elementos da série...ou seja:

$u_1 = Au_0 = c_1 A x_1 + c_2 A x_2 = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2$

$u_2 = A^2 u_0$

$u_{100} = A^{100} u_0 = c_1 \lambda_1^{100} x_1 + c_2 \lambda_2^{100} x_2$

0

Logo vai sobrar só o primeiro termo (pois ele é maior que 1)...vamos escrever u_0 como CL

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 5: Fibonacci   0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... $u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$

u_0 como uma CL dos autovetores será:

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1\, x_1 + c_2\, x_2$$

Sabemos que $x_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$, conhecemos $\lambda_1 \approx 1{,}618$ e $\lambda_2 \approx -0{,}618$ logo encontramos c_1 e c_2

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$c_1\, 1{,}618 - c_2\, 0{,}618 = 1$ $c_1 = -\, c_2 \approx 0{,}447$

$c_1 + c_2 = 0$

$$u_0 \approx 0{,}447 \begin{bmatrix} 1{,}618 \\ 1 \end{bmatrix} - 0{,}447 \begin{bmatrix} 0{,}618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{100} = A^{100} u_0 = c_1\, \lambda_1^{100}\, x_1 + \cancel{c_2\, \lambda_2^{100}\, x_2} = 0{,}447\, \lambda_1^{100} \begin{bmatrix} 1{,}618 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}447\; 1{,}618^{100} \begin{bmatrix} 1{,}618 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{101} \\ F_{100} \end{bmatrix}$$

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 6: Processos de Markov

São processos muito comuns, por exemplo no caso da migração. Imagine a seguinte situação: Todo ano 1/10 de pessoas de fora de uma região se mudam para essa região, e 2/10 dos habitantes dessa região se mudam para fora. Começamos com y_0 pessoas morando fora da região e z_0 habitantes morando na região.

No fim do primeiro ano, os números de pessoas que se mudam para a região e de pessoas que deixam a região são y_1 e z_1 portanto teremos:

$$y_1 = 0,9\ y_0 + 0,2\ z_0$$
$$z_1 = 0,1\ y_0 + 0,8\ z_0$$

Ou matricialmente

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz possui as duas propriedades essenciais de um processo de Markov:

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 6: Processos de Markov

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes de processos de Markov:

1. O numero total de elementos (pessoas) permanece fixo: cada coluna da matriz de Markov soma 1. Não se ganham nem se perdem elementos.

2. O número de pessoas que se mudam para a região e de pessoas que deixam a região nunca poderão ser negativos (já foram considerados como positivos): a matriz não tem elementos negativos (As potencias A^k são todas não negativas)

Este é outro exemplo de aplicação do que aprendemos

Resolveremos a equação das diferenças de Markov utilizando o fato de que $u^k = S\Lambda^k S^{-1} u_0 = S\Lambda^k c$

A seguir veremos que a população tende a um "estado estacionário"

Por onde começar?

Primeiro diagonalizamos a matriz A

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 6: Processos de Markov

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

1º precisamos dos autovalores que tornam a matriz singular

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0{,}9 - \lambda & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 - \lambda \end{bmatrix} = (0{,}9 - \lambda)\,(0{,}8 - \lambda) - 0{,}02 = \quad {}^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}7 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0{,}7$

2º escrevemos a matriz A fatorada (para poder calcular facilmente suas potências)

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3º Agora encontramos a distribuição de população após k anos ...

Autovalores e autovetores

EXEMPLO 6: Processos de Markov

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= (y_0 + z_0)\ 1^k \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2\ z_0)\ 0,7^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2$$

Analisando esta solução vemos que o $0,7^k$ elimina este termo para $k \to \infty$ e a solução como um todo tende a um estado estacionário $u_\infty = (y_\infty + z_\infty)$ que é:

$$\begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

O estado estacionário sempre é o autovetor de A correspondente a <u>**λ = 1**</u> (pois 1^∞=1) e λ = 1 sempre aparece como autovalor de A nos processos de Markov

Autovalores e autovetores

Estabilidade

A estabilidade das soluções depende dos autovalores da matriz A

Desta forma, a equação das diferenças $u^k + 1 = Au^k$ pode ser:

1. estável se todos os autovalores satisfizerem $|\lambda_i| < 1$
2. neutralmente estável se algum $|\lambda_i| = 1$ e todos os outros $|\lambda_i| < 1$
3. e instável se pelo menos um autovalor possuir $|\lambda_i| > 1$

No caso estável (caso 1), as potencias A^k tendem a zero, assim como $u^k = A^k u_0$

EXEMPLO 7 Esta matriz A certamente é estável: $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} u_k$

Pois os autovalores estão na diagonal principal (matriz triangular!)... e esses valores são <1

Portanto, começando de qualquer u_0 a solução vai tender a zero...

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 262

Conjunto de problemas 5.3

Resolver: 2; 3; 4; 8; 10; 12; 14; 16; 19; 23; 24; 27