EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 01_2

INTRODUÇÃO

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

No caso dos exemplos da aula passada obtivemos

Queda livre: $$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}28\,v$$

Corujas e ratos: $$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450$$

Essas equações têm a **forma geral y' = ay – b**

Podemos usar métodos de cálculo para resolver equações diferenciais deste tipo.....vejamos como...

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Exemplo das corujas e os ratos

Para resolver a equação diferencial $$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450$$

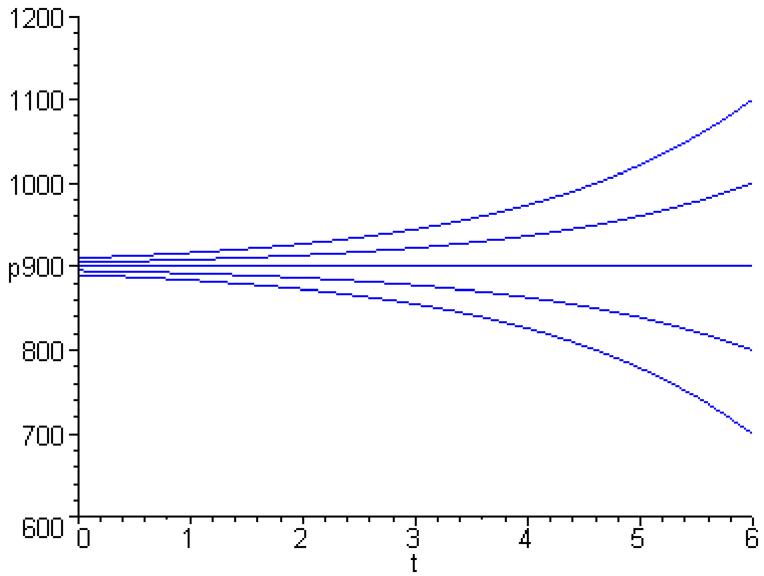
usamos métodos de cálculo, da seguinte forma:

$$\frac{dp}{dt} = 0.5(p-900) \;\Rightarrow\; \frac{dp/dt}{p-900} = 0.5 \;\Rightarrow\; \int \frac{dp}{p-900} = \int 0.5dt$$

$$\Rightarrow\; \ln|p-900| = 0.5t + C \;\Rightarrow\; |p-900| = e^{0.5t+C}$$

$$\Rightarrow\; p-900 = \pm e^{0.5t}e^{C} \;\Rightarrow\; p = 900 + ke^{0.5t},\; k = \pm e^{C}$$

Desta forma a solução é $$p = 900 + k\,e^{0{,}5\,t}$$



Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Exemplo das corujas e os ratos

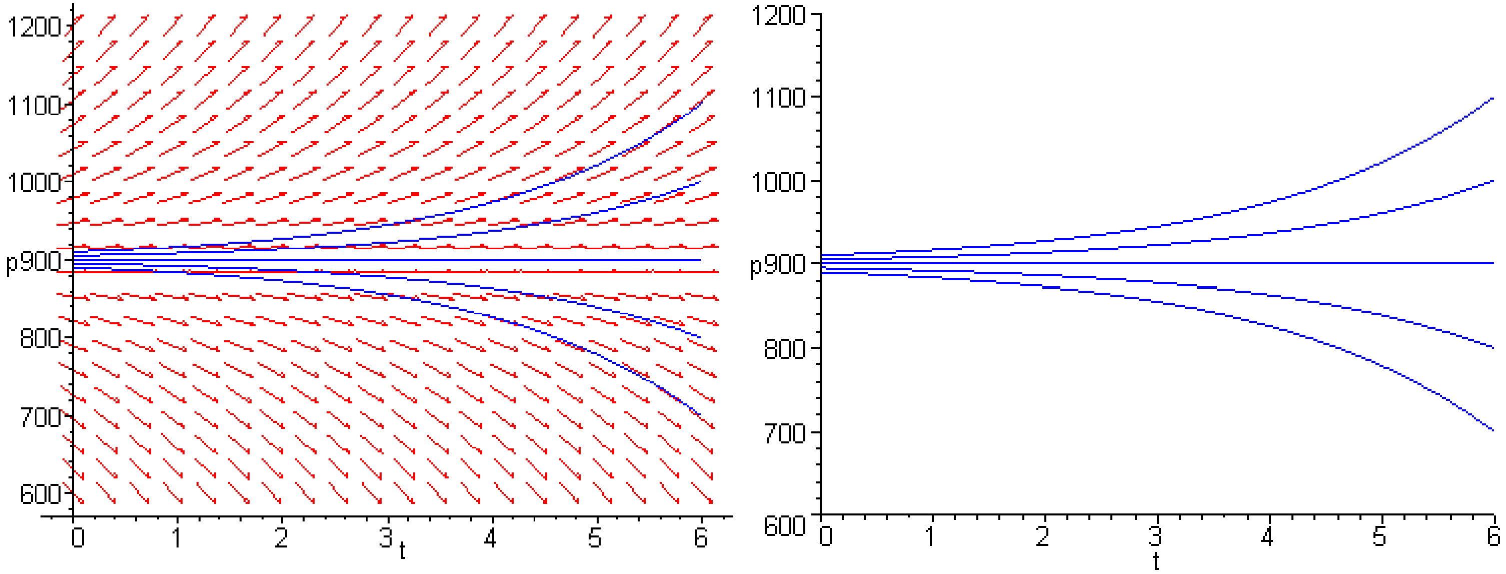
Obtivemos infinitas soluções para nossa equação (pois k é uma constante qualquer)!

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450 \quad \Rightarrow \quad p = 900 + k\, e^{0{,}5\,t}$$

As soluções (**curvas integrais**) para vários valores de k e direções do campo são apresentadas na figura

Se escolhemos k=0 obtemos a solução de equilíbrio (estacionaria)

Se escolhemos k ≠ 0 as soluções divergem com o passar do tempo t



Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Exemplo das corujas e os ratos

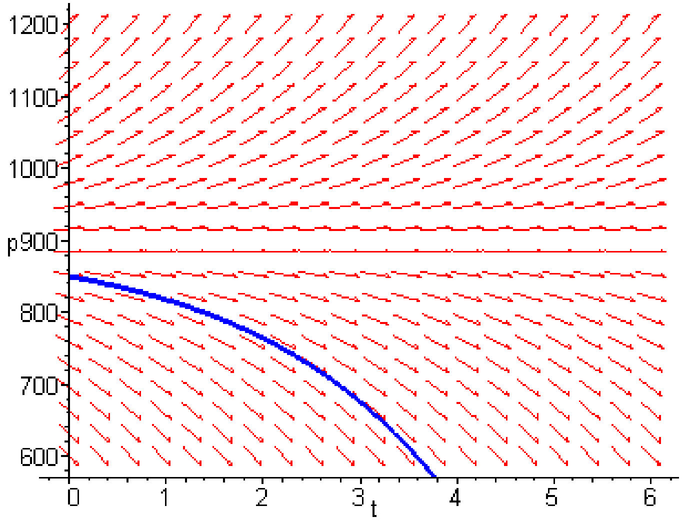
As equações diferenciais sempre apresentam **infinitas soluções** (pois temos integrações que fazem aparecer as constantes aleatórias)
Se conhecemos algum ponto da solução (por exemplo uma condição inicial), podemos identificar a solução única para essa condição

No nosso exemplo vamos supor que a população inicial de ratos é 850 (**p(0) = 850**)

$$p = 900 + k\, e^{0{,}5\, t} \quad \Rightarrow \quad p(0) = 850 = 900 + k\, e^{0} \quad \Rightarrow \quad k = -50$$

A solução específica para essa condição inicial é:

$$p = 900 - 50\, e^{0{,}5\, t}$$



Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Solução geral

Para resolver as equações do tipo geral: **y' = ay − b**

utilizamos o seguinte procedimento de cálculo:

$$\frac{dy}{dt} = a\left(y - \frac{b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{y - \frac{b}{a}} = a \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y - \frac{b}{a}} = \int a\, dt$$

$$\Rightarrow \quad ln\left|y - \frac{b}{a}\right| = at + C \quad \Rightarrow \quad \left|y - \frac{b}{a}\right| = e^{at+C} \quad \Rightarrow \quad y - \frac{b}{a} = \pm e^{at} e^{C}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a} + ke^{at} \qquad k = \pm e^{C}$$

Portanto a solução geral é: $\boldsymbol{y(t) = \frac{b}{a} + ke^{at}}$

Onde k é uma constante que só pode ser definida a partir de alguma informação do problema específico

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

O problema do valor inicial

Como proceder quando temos uma condição inicial?

$$y' = ay - b \qquad y(0) = y_0$$

Como sabemos a solução dessa equação é $y(t) = \frac{b}{a} + ke^{at}$

Utilizamos essa condição para determinar k $y(0) \equiv y_0 = \frac{b}{a} + ke^{0} \Rightarrow k = y_0 - \frac{b}{a}$

Desta forma a solução específica para nosso problema com essa condição inicial é:

$$\boxed{y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a}\right]e^{at}}$$

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

A solução de equilíbrio

Retornemos à questão da solução estacionária

$$y' = ay - b = 0$$

Para encontrar esta solução consideramos y´=0 e obtemos y para essa condição

$$y(t) = \frac{b}{a}$$

Vamos analisar a solução geral que obtivemos anteriormente

$$\boxed{y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a}\right] e^{at}}$$

- Se y_0=b/a .... y é constante y(t)=b/a
- Se y_0>b/a .... e a>0...y cresce exponencialmente (ratos e corujas)
- Se y_0>b/a .... e a<0...y decai assimptoticamente a b/a (queda livre)
- Se y_0<b/a .... e a>0...y decresce exponencialmente (ratos e corujas)
- Se y_0<b/a .... e a<0...y cresce assimptoticamente a b/a (queda livre)

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Voltando ao exemplo da queda livre...

Vamos supor um objeto de 10 kg caindo em queda livre e consideremos o coeficiente γ=2 kg/s

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}2\, v$$

Vamos supor que o objeto é solto de uma altura de 300 m

(a) Determine a velocidade em função do tempo

(b) O tempo até o impacto com o solo

(c) Sua velocidade no momento do impacto

Para responder à questão (a) é necessário resolver um problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}2\, v \qquad v(0) = 0$$

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Voltando ao exemplo da queda livre...

Utilizando a solução geral...

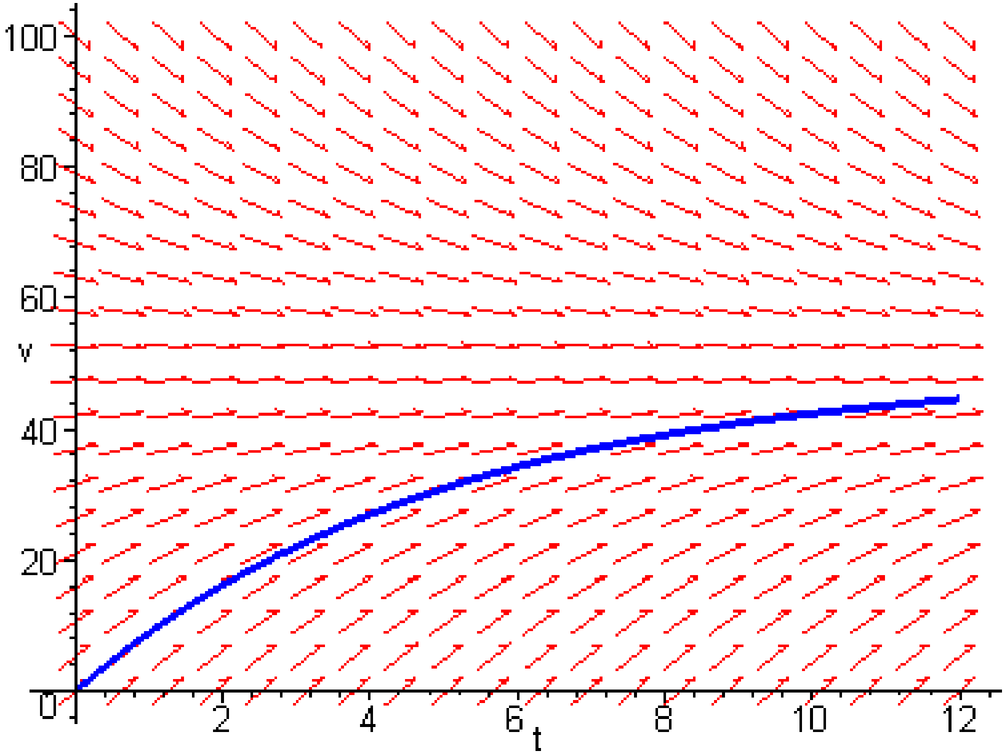
$$y = \frac{b}{a} + \left[y_0 - \frac{b}{a}\right] e^{at} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{9{,}8}{0{,}2} + \left[0 - \frac{9{,}8}{0{,}2}\right] e^{-0{,}2t} \quad \Rightarrow \quad v = 49(1 - e^{-0{,}2t})$$

O gráfico da dessa solução na figura do campo de direções da equação é

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}2\, v$$

$$v(0) = 0$$

$$\boldsymbol{v = 49\left(1 - e^{-0{,}2t}\right)}$$



Esta é a dependência da velocidade com o tempo.

Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Vamos responder às questões (b) e (c)

Definimos s(t) como a distância percorrida no tempo t $\quad s' = v(t) = 49(1 - e^{-0,2t})$

$$\Rightarrow \quad s(t) = 49\,t + 245\,e^{-0,2t} + C \qquad s(0) = 0 \;\Rightarrow\; C = -245$$

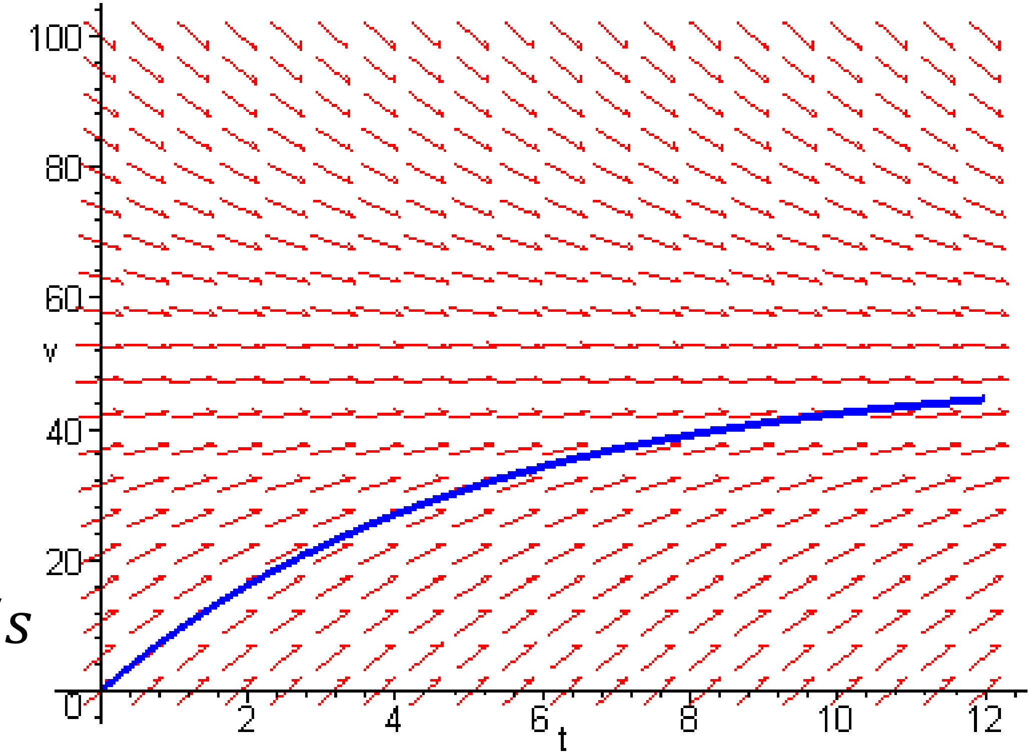
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{s(t) = 49\,t + 245\,e^{-0,2t} - 245}$$

Se T é o tempo para o impacto se cumpre:

$$s(T) = 49\,T + 245\,e^{-0,2T} - 245 = 300$$

Resolvendo essa equação (utilizando o Solver) obtemos T ≅ 10,51 s

$$v(10{,}51) = 49(1 - e^{-0,2\cdot 10,51}) \approx 43{,}01\,m/s$$



Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço