EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 02_5

Noções de Existência e Unicidade

Noções de Existência e Unicidade

Introdução

Até agora, discutimos uma série de problemas de valor inicial, cada um dos quais tinha uma solução e, aparentemente, apenas uma.

Isso levanta a questão de se isso é verdade para todos os problemas de valor inicial para equações de primeira ordem.

Em outras palavras, todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução?

Esse é um ponto importante, se você encontrar um problema de valor inicial ao investigar algum problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar muito tempo e esforço tentando resolvê-lo.

Noções de Existência e Unicidade

Teoremas

Além disso, se você encontrar uma solução, você pode estar interessado em saber se você deve continuar a busca por outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções.

Para equações lineares, as respostas para essas questões são dadas pelo teorema fundamental a seguir.

Teorema Fundamental das Equações Lineares

Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto I: $\alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \varphi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = g(t)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial $y(t_0) = y_0$ em que y_0 é um valor inicial arbitrário dado.

Noções de Existência e Unicidade

Teoremas

No caso de equações não lineares o teorema é um pouco diferente

Teorema Fundamental das Equações não Lineares

Suponha que as funções f e ∂f/∂y são contínuas em algum retângulo $\alpha < t < \beta$, $\varepsilon < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0). Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t,y) \qquad y(t_o) = y_0$$

Observe que as hipóteses deste teorema se reduzem às do teorema anterior, se a equação diferencial for linear. Pois nesse caso,

$$f(t,y) = -p(t)y + g(t) \qquad \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = -p(t)$$

de modo que a continuidade de f e de $\partial f/\partial y$ é equivalente à continuidade de p e de g.

Noções de Existência e Unicidade

Teoremas

Observamos aqui que as condições enunciadas são suficientes para garantir a existência de uma única solução do problema de valor inicial em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, mas elas **não são necessárias**. Em outras palavras, a conclusão permanece verdadeira sob hipóteses ligeiramente mais fracas sobre a função f. De fato, a existência de uma solução (mas não sua unicidade) pode ser estabelecida supondo-se apenas a continuidade de f.

Uma consequência geométrica importante da unicidade nos dois teoremas é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar. Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondente no ponto de interseção, em violação dos teoremas

Vamos ver exemplos de aplicação destes teoremas tanto para equações lineares como não lineares...

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 1

Use o Teorema das equações lineares para encontrar um intervalo no qual o problema de valor inicial a seguir tem uma única solução

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

Evidentemente esta equação temos que p(t)=2/t e g(t)=4t

Logo g é contínua para todo t, enquanto p só é contínua para t < 0 ou t > 0.

O intervalo t > 0 contém o ponto inicial y(1) portanto, o teorema garante que o problema tem uma única solução no intervalo 0 < t < ∞.

Como já vimos (aula 02_1) a solução desse problema de valor inicial é

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2} \qquad t > 0$$

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 1

Observe que o teorema para as equações lineares diz que a solução existe em qualquer intervalo I contendo o ponto inicial t_0 e no qual os coeficientes p e g são contínuos. Ou seja, a solução pode ser descontínua ou deixar de existir apenas em pontos em que pelo menos uma das funções p ou g é descontínua. Frequentemente, tais pontos podem ser identificados facilmente como no nosso exemplo no ponto $t=0$

Suponha agora que mudamos a condição inicial $y(1)=2$ para $y(-1) = 2$. Então o teorema afirma que existe uma única solução para $t < 0$. Como você pode verificar facilmente, a solução é a mesma, só que agora no intervalo $-\infty < t < 0$.

Vejamos um exemplo de equação não linear...

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 2

Use o Teorema das equações não lineares ao problema de valor inicial (PVI) a seguir

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2\,(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

Observe que aqui foi utilizada a variável x no lugar de t portanto:

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2\,(y-1)} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2\,(y-1)^2}$$

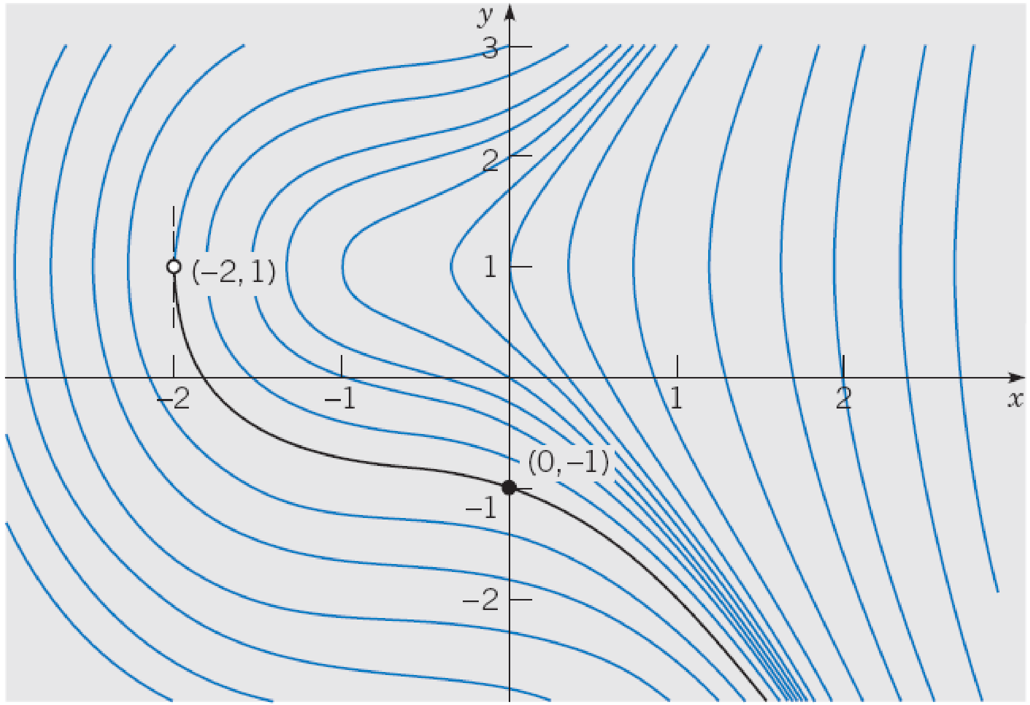
Ambas funções, f(y,x) e sua derivada, são contínuas em toda a parte, exceto na reta **y = 1**

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 2

Ambas funções, f(y,x) e sua derivada, são contínuas em toda a parte, exceto na reta **y = 1**. Logo, podemos desenhar um retângulo em torno do ponto inicial (0, −1) no qual ambas as funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas. Portanto, o teorema garante que o problema de valor inicial tem uma única solução **em algum intervalo** em torno de x = 0.

No entanto, embora o retângulo desenhado possa em teoria ser esticado indefinidamente para x positivo e negativo, isso não significa, necessariamente, que a solução existe para todo x. De fato, este PVI foi resolvido na aula 02_2 e a solução só existe para x > −2.



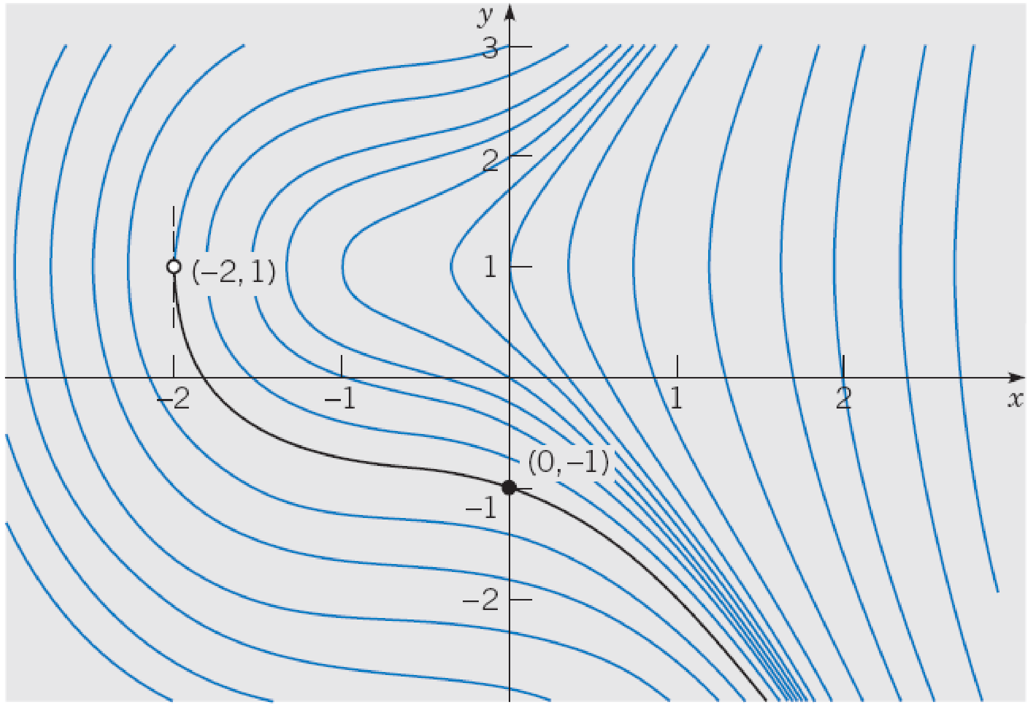
Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 2

Suponha agora que mudamos a condição inicial para y(0) = 1. O ponto inicial agora está na reta y = 1, de modo que não podemos desenhar nenhum retângulo em torno dele no qual as funções f e ∂f /∂y sejam contínuas.

Então o teorema não diz nada sobre soluções possíveis para esse problema modificado.

No entanto, se separarmos as variáveis e integrarmos, como vimos na aula, veremos que $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$



Considerando x=0 e y=1, teremos C=-1

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x} \qquad x > 0 \qquad y(0) = 1$$

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 3

Considere o problema de valor inicial para $t \geq 0$

$$y' = \sqrt[3]{y} \qquad\qquad y(0) = 0$$

Aplique o teorema correspondente a este problema de valor inicial e depois resolva o problema.

A função f (t,y) é contínua em toda a parte, mas $\partial f/\partial y$ não existe quando $y = 0$; logo, não é contínua nesse ponto. Assim, o teorema não pode ser aplicado a este problema e não podemos tirar nenhuma conclusão a partir dele.

No entanto, pela observação após o teorema a continuidade de f garante a existência de soluções, mas não sua unicidade!!!.

Para compreender melhor a situação, vamos resolver o problema, o que é fácil, já que a equação é separável...

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 3

$$\sqrt[3]{y}\,dy = dt \qquad \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = t + C \qquad y = \left[\frac{2}{3}(t+C)\right]^{\frac{3}{2}} \qquad y(0) = 0$$

A condição inicial é satisfeita, se c = 0, de modo que: $y = \Phi_1(t) = \left[\frac{2}{3}t\right]^{\frac{3}{2}}$

$$t \geq 0$$

Por outro lado a função $y = \Phi_2(t) = -\left[\frac{2}{3}t\right]^{\frac{3}{2}}$ $t \geq 0$ é mais uma solução

E tem mais uma... $y = \Psi(t) = 0$ $t \geq 0$

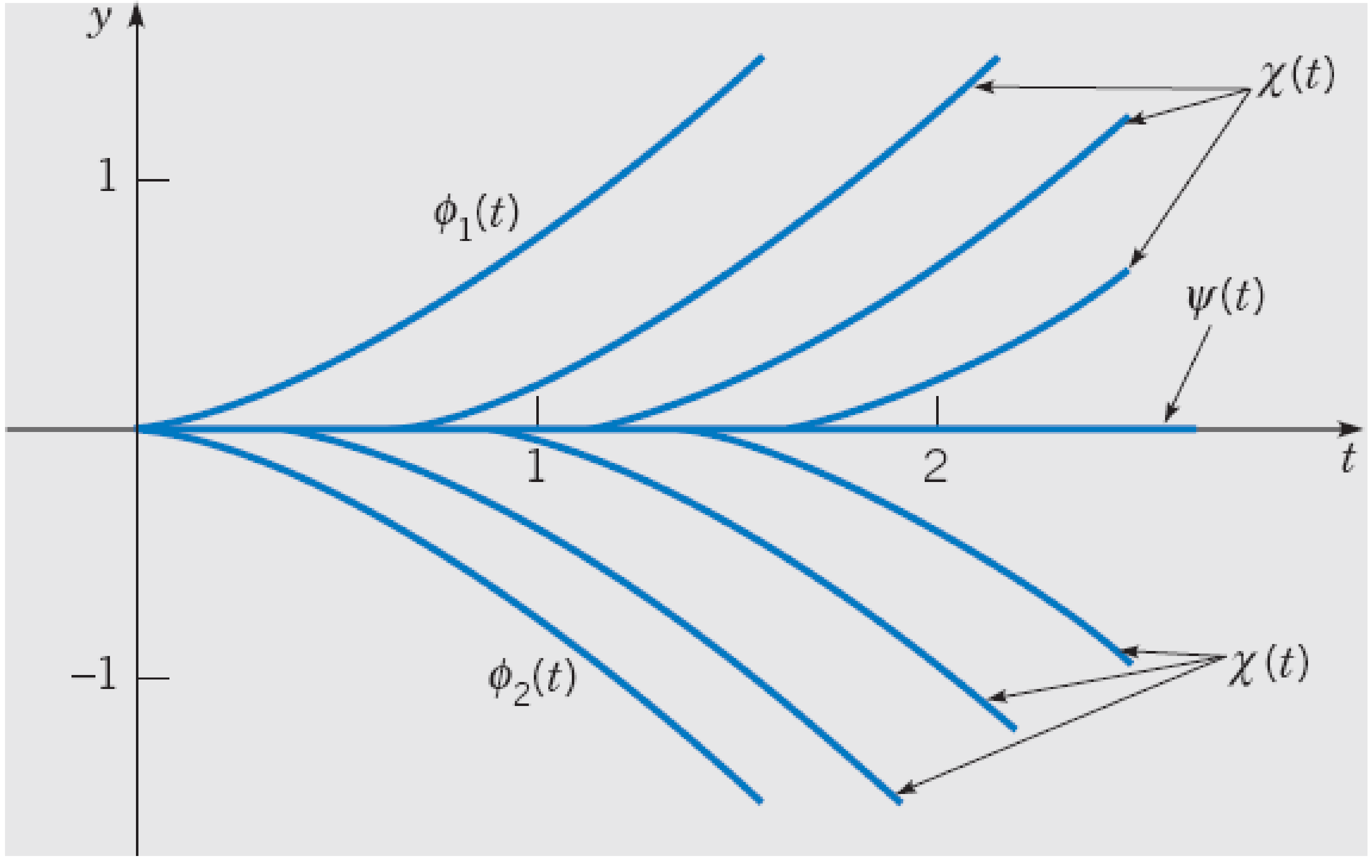
De fato, para qualquer $t_0>0$ as funções
$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 \\ \pm\left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^{\frac{3}{2}} & t \geq t_0 \end{cases}$$

são contínuas, diferenciáveis (em particular em $t = t_0$) e são soluções do problema de valor inicial. Portanto, esse problema tem uma família infinita de soluções... Vamos ver o gráfico desta soluções...

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 3

Como já observamos, a falta de unicidade de soluções não contradiz o teorema de existência e unicidade, já que ele não é aplicável se o ponto inicial pertencer ao eixo dos t. Se o ponto inicial (t_0, y_0) fosse qualquer outro ponto que não pertence ao eixo dos t, o teorema garante que existe uma única solução da equação diferencial $y' = y^{1/3}$ que contém esse ponto (t_0, y_0).



Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 4

Resolva este PVI e determine o intervalo no qual a solução existe

$$y' = y^2 \qquad\qquad y(0) = 1$$

O teorema correspondente garante que esse problema tem uma única solução, já que $f(t,y) = y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em toda a parte. Para encontrar a solução, separamos as variáveis e integramos, resultando em

$$y^{-2}dy = dt \qquad\qquad -y^{-1} = t + C$$

Resolvendo em y... $$y = -\frac{1}{t + C}$$

Para satisfazer a condição inicial temos que $C = -1$, de modo que a solução é:

$$y = -\frac{1}{t - 1}$$

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 4

$$y = -\frac{1}{t-1}$$

É claro que esta solução torna-se ilimitada quando t → 1; portanto, a solução só existe no intervalo −∞ < t < 1.

Não há nenhuma dica na equação diferencial original $y' = y^2$ que mostre que o ponto t = 1 vai ser diferente de alguma maneira.

Além disso, se a condição inicial for substituída por $y(0)=y_0$ então a constante C tem que ser igual a $C = -1/y_0$ e segue que

$$y = \frac{y_0}{t - y_0 t}$$

Noções de Existência e Unicidade

Exemplo 4

$$y = \frac{y_0}{t - y_0 t}$$

Esta é a solução do problema de valor inicial com nossa condição inicial.

Observe que esta solução torna-se ilimitada quando $t \to 1/y_0$, de modo que o intervalo de existência da solução é $-\infty < t < 1/y_0$ se $y_0 > 0$ e é $1/y_0 < t < \infty$ se $y_0 < 0$.

Esse exemplo ilustra outra característica de problemas de valor inicial para equações não lineares: as singularidades da solução podem depender tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

Noções de Existência e Unicidade

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço