EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 03_4

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS NÃO HOMOGÊNEAS. MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

INTRODUÇÃO

Vamos retornar à equação não homogênea

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(\mathrm{t})\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \qquad (1)$$

em que p, q e g são funções (contínuas) dadas em um intervalo aberto *I*.
A equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (2)$$

na qual g(t) = 0 e p e q são as mesmas funções da equação (1) é chamada de equação homogênea associada à equação (1).

Os dois teoremas a seguir descrevem a estrutura de soluções da equação não homogênea (1) e fornecem uma base para a construção de sua solução geral.

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Teorema 1

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não homogênea (1), então sua diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea associada (2). Se, além disso, y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções para a equação (2), então

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad (3)$$

Para provar esse resultado, note que Y_1 e Y_2 satisfazem as equações

$$L[Y_1](t) = g(t) \qquad\qquad L[Y_2](t) = g(t)$$

Subtraindo...

$$L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = L[Y_1 - Y_2](t) = 0$$

Então $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação (2). Finalmente, como todas as soluções da equação (2) podem ser expressas como uma combinação linear das funções em um conjunto fundamental de soluções, a solução $Y_1 - Y_2$ também pode ser expressa nessa forma. Logo, a Eq. (3) é válida e a demonstração está completa.

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Teorema 2

A solução geral da equação não homogênea (1) pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t) \qquad (4)$$

em que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (2), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é uma solução particular da equação não homogênea (1).

A demonstração do Teorema 2 segue imediatamente do Teorema 1. Note que a Eq. (3) permanece válida se Y_1 é uma solução arbitrária ϕ da Eq. (1) e Y_2 é uma solução específica Y da mesma equação. Assim, da Eq. (3) obtemos

$$\emptyset(t) - Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

que é equivalente à Eq. (4). Como ϕ é uma solução arbitrária da Eq. (1), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (4) inclui todas as soluções da Eq. (1); é natural, portanto, chamá-la de solução geral da Eq. (1).

Resumindo

O Teorema 2 afirma que, para resolver a equação não homogênea (1), precisamos fazer três coisas:

1. Encontrar a solução geral $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ da equação homogênea associada. Esta solução é chamada, muitas vezes, de solução complementar, e pode ser representada por $y_c(t)$.
2. Encontrar uma única solução $Y(t)$ da equação não homogênea. Referimo-nos a essa solução, muitas vezes, como uma solução particular.
3. Somar as duas funções encontradas nas duas etapas precedentes.

Já vimos como encontrar $y_c(t)$ (pelo menos quando a equação homogênea (2) tem coeficientes constantes). Portanto focaremos nossa atenção em encontrar uma solução particular $Y(t)$ da equação não homogênea (1).

O Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados (ou a determinar) requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular Y(t), mas com os coeficientes não especificados.

Substituímos, então, a expressão hipotética na Eq. (1) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita.

Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação diferencial (1) e podemos usá-la como a solução particular Y(t).

Se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Nesse caso, teremos que modificar a função proposta e tentar de novo.

Exemplo 1

Em geral o método dos coeficientes indeterminados é limitado a funções p e q constantes e quando g(t) é uma função simples tipo polinomial, exponencial, senos e cossenos (para as quais é fácil adivinhar a forma da solução particular)

Como exemplo vamos considerar a equação: $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$

Procuramos uma função Y tal que $Y''(t) – 3Y'(t) – 4Y(t)$ seja igual a $3e^{2t}$.

Como uma função exponencial se reproduz, supomos que Y(t) é algum múltiplo de e^{2t}, ou seja,

$$Y(t) = Ae^{2t} \Rightarrow Y'(t) = 2Ae^{2t}, Y''(t) = 4Ae^{2t}$$

substituído $4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t} \Leftrightarrow -6Ae^{2t} = 3e^{2t} \Leftrightarrow A = -1/2$

Portanto, $–6Ae^{2t}$ tem que ser igual a $3e^{2t}$; logo, A = –1/2. Assim, uma solução particular é

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação: $y'' - 3y' - 4y = 2\,sen\,t$

Como a função seno se reproduz, supomos que Y(t) = A sen t

$$Y(t) = A\,\mathrm{sen}\,t \Rightarrow Y'(t) = A\cos t\,, Y''(t) = -A\,\mathrm{sen}\,t$$

substituído e agrupando...

$$-A\,\mathrm{sen}\,t - 3A\cos t - 4A\,\mathrm{sen}\,t = 2\,\mathrm{sen}\,t$$
$$\Leftrightarrow (2 + 5A)\,\mathrm{sen}\,t + 3A\cos t = 0$$
$$\Leftrightarrow c_1\,\mathrm{sen}\,t + c_2\cos t = 0$$

Como a solução tem que ser válida para todo t....

tem que ser válida em t = 0 e t = π/2. Nesses pontos temos 3A = 0 e 2 + 5A = 0, respectivamente. Essas condições contraditórias significam que não existe nenhuma constante A que torne nossa proposta de solução válida para t = 0 e t = π/2, muito menos para todo t...

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Exemplo 2

A aparição de um termo em cosseno sugere que modifiquemos nossa hipótese original, incluindo um termo em cosseno em Y(t), ou seja,

$$Y(t) = A\,\text{sen}\,t + B\cos t \Rightarrow Y'(t) = A\cos t - B\,\text{sen}\,t\,, Y''(t) = -A\,\text{sen}\,t - B\cos t$$

Substituindo essas expressões e agrupando termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&(-A\,\text{sen}\,t - B\cos t) - 3(A\cos t - B\,\text{sen}\,t) - 4(A\,\text{sen}\,t + B\cos t) = 2\sin t \\
&\Leftrightarrow (-5A + 3B)\,\text{sen}\,t + (-3A - 5B)\cos t = 2\,\text{sen}\,t \\
&\Leftrightarrow -5A + 3B = 2, -3A - 5B = 0 \\
&\Leftrightarrow A = -5/17, B = 3/17
\end{aligned}$$

Agora sim, a solução particular é: $Y(t) = \dfrac{-5}{17}\sin t + \dfrac{3}{17}\cos t$

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Exemplo 3

Encontre uma solução particular da equação: $y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$

Supomos que Y(t) seja um polinômio do mesmo grau que g(t)

$$Y(t) = At^2 + Bt + C \Rightarrow Y'(t) = 2At + B, Y''(t) = 2A$$

substituído e agrupando...

$$2A - 3(2At + B) - 4(At^2 + Bt + C) = 4t^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow -4At^2 - (6A + 4B)t + (2A - 3B - 4C) = 4t^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow -4A = 4, 6A + 4B = 0, 2A - 3B - 4C = -1$$
$$\Leftrightarrow A = -1, B = 3/2, C = -11/8$$

Obtemos assim a solução particular... $Y(t) = -t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{11}{8}$

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Exemplo 4

No caso de produtos aplique o produto das soluções já conhecidas...por exemplo:

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2t$$

Supomos que Y(t) seja um produto de e^t com senos e cossenos:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= Ae^{t}\cos 2t + Be^{t}\,\mathrm{sen}\,2t\\
Y'(t) &= Ae^{t}\cos 2t - 2Ae^{t}\,\mathrm{sen}\,2t + Be^{t}\,\mathrm{sen}\,2t + 2Be^{t}\cos 2t\\
&= (A+2B)e^{t}\cos 2t + (-2A+B)e^{t}\,\mathrm{sen}\,2t\\
Y''(t) &= (A+2B)e^{t}\cos 2t - 2(A+2B)e^{t}\,\mathrm{sen}\,2t + (-2A+B)e^{t}\,\mathrm{sen}\,2t\\
&+2(-2A+B)e^{t}\cos 2t\\
&= (-3A+4B)e^{t}\cos 2t + (-4A-3B)e^{t}\,\mathrm{sen}\,2t
\end{aligned}$$

Obtemos (após substituir e encontrar A e B) :

$$A = \frac{10}{13}, B = \frac{2}{13} \Rightarrow Y(t) = \frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\,\mathrm{sen}\,2t$$

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Soma de funções

Suponha, agora, que g(t) é uma soma de dois termos (e não o produto), ou seja, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, e suponha que Y_1 e Y_2 são soluções das seguintes equações

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$$
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$$

Então $Y_1 + Y_2$ é solução da equação não homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$

Exemplo 5. Considere a equação: $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\,\mathrm{sen}\,t - 8e^{t}\cos 2\,t$

O que temos que resolver, separadamente, são as três equações a seguir e somar as soluções (que já foram obtidas nos exemplos anteriores:

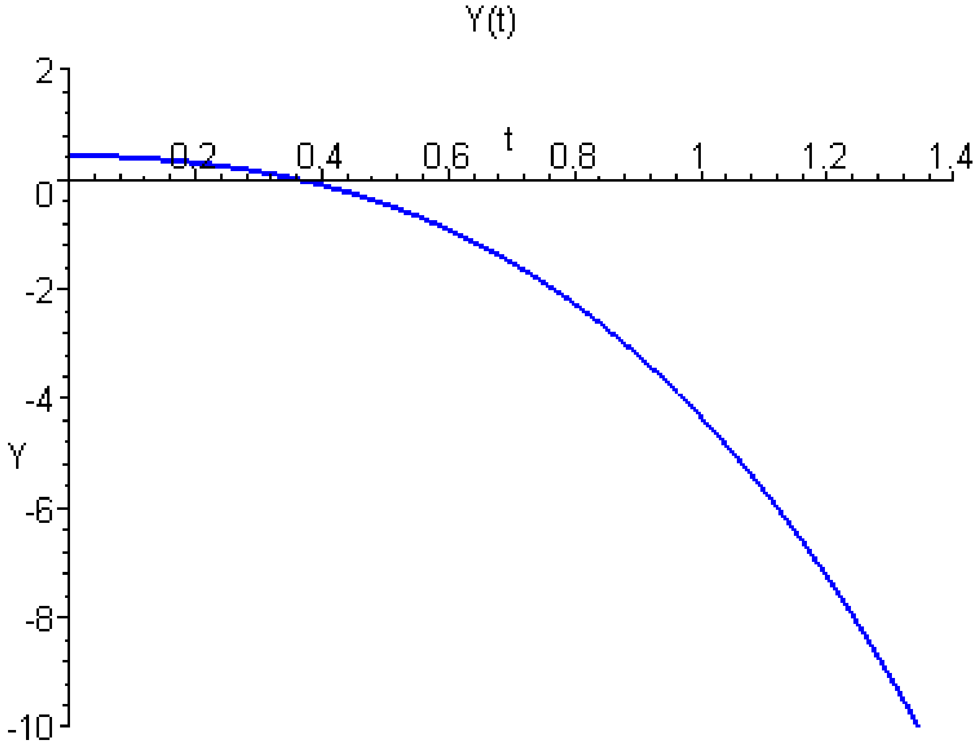
$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$
$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2\,t$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}e^{t}\cos 2\,t + \frac{2}{13}e^{t}\sin 2\,t$$

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Soma de funções

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}e^{t}\cos 2\,t + \frac{2}{13}e^{t}\sin 2\,t$$



ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Exemplo 6

Encontre uma solução particular da equação: $y'' + 4y = 3\cos 2\,t$

Tentamos:

$$Y(t) = A\,\text{sen}\,2t + B\cos 2t \Rightarrow Y'(t) = 2A\cos 2t - 2B\,\text{sen}\,2t\,, Y''(t) = -4A\,\text{sen}\,2t - 4B\cos 2t$$

Substituímos na ODE e encontramos que:

$$\begin{aligned}(-4A\sin 2\,t - 4B\cos 2\,t) + 4(A\sin 2\,t + B\cos 2\,t) &= 3\cos 2\,t\\ (-4A + 4A)\sin 2\,t + (-4B + 4B)\cos 2\,t &= 3\cos 2\,t\\ 0 &= 3\cos 2\,t\end{aligned}$$

Não existe uma solução particular valida para todo t da forma $A\,\text{sen}\,2t + B\cos 2t$

Vamos tentar entender por que isso aconteceu....

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Exemplo 6

Se procuram na aula de equações homogêneas nos vimos que a solução da equação homogênea

$$y'' + 4y = 0$$

era:

$$y(t) = c_1 \cos 2\,t + c_2 \sin 2\,t$$

Portanto nossa proposta de solução particular é solução da equação homogênea e não da equação não homogênea!!! (ela faz parte do conjunto de soluções fundamentais da equação homogênea)

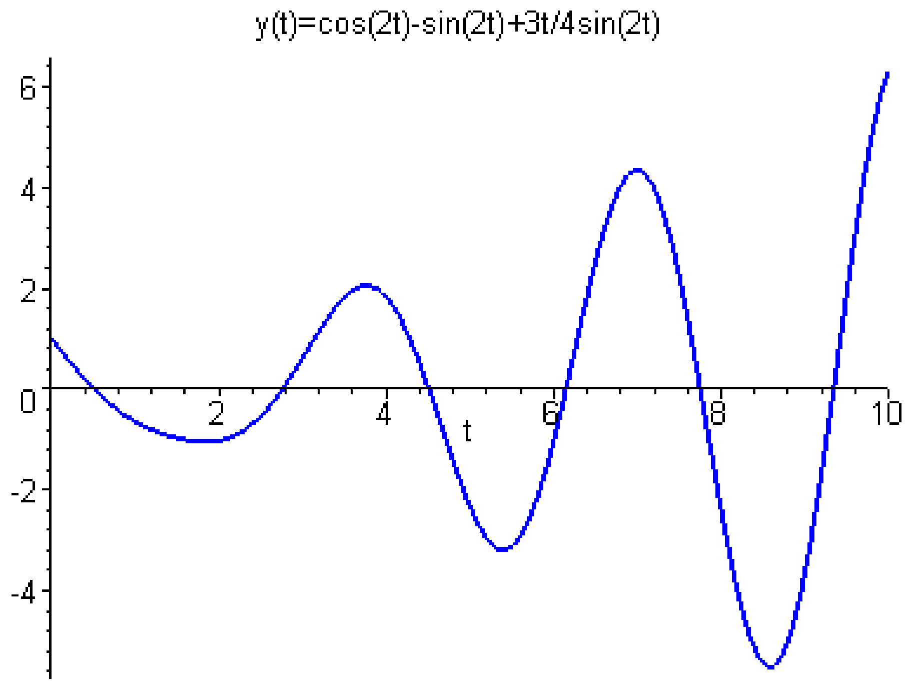
Precisamos uma função um pouco diferente. Nossa próxima tentativa de Y será:

$$\begin{aligned} Y(t) &= At \sin 2\,t + Bt \cos 2\,t \\ Y'(t) &= A \sin 2\,t + 2At \cos 2\,t + B \cos 2\,t - 2Bt \sin 2\,t \\ Y''(t) &= 2A \cos 2\,t + 2A \cos 2\,t - 4At \sin 2\,t - 2B \sin 2\,t - 2B \sin 2\,t - 4Bt \cos 2\,t \\ &= 4A \cos 2\,t - 4B \sin 2\,t - 4At \sin 2\,t - 4Bt \cos 2\,t \end{aligned}$$

Exemplo 6

Substituindo as derivadas na equação original encontramos:

$$4A\cos 2t - 4B\sin 2t = 3\cos 2t$$
$$\Rightarrow A = 3/4, B = 0$$
$$\Rightarrow Y(t) = \frac{3}{4} t \sin 2t$$



ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Resumo

Vamos resumir as etapas envolvidas em encontrar a solução de um problema de valor inicial consistindo em uma equação não homogênea da forma $ay'' + by' + cy = g(t)$ em que os coeficientes a, b e c são constantes, junto com um par de condições iniciais dado:

1. Encontre a solução geral da equação homogênea associada.

2. Certifique-se de que a função g(t) pertence à classe de funções discutidas nesta seção, ou seja, não envolve outras funções além de exponenciais, senos, cossenos, polinômios ou somas ou produtos de tais funções. Se não for esse o caso, use o método de variação dos parâmetros (discutido na próxima seção).

3. Se $g(t) = g_1(t) + \cdot \cdot \cdot + g_n(t)$,ou seja, se g(t) é uma soma de n funções, então forme n subproblemas, cada um dos quais contendo apenas uma das funções $g_1(t)$, …, $g_n(t)$. O i-ésimo subproblema consiste na equação $ay'' + by' + cy = g_i(t)$ em que i varia de 1 a n

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Resumo

4. Para o i-ésimo subproblema, suponha uma solução particular $Y_i(t)$ consistindo na função apropriada, seja ela exponencial, seno, cosseno, polinomial ou uma combinação dessas. Se existir qualquer duplicidade na forma suposta de $Y_i(t)$ com as soluções da equação homogênea (encontrada na etapa 1), então multiplique $Y_i(t)$ por t ou (se necessário) por t^2, de modo a remover a duplicidade.

5. Encontre uma solução particular $Y_i(t)$ para cada um dos subproblemas. Então a soma $Y_1(t) + \cdot \cdot \cdot + Y_n(t)$ será uma solução particular da equação não homogênea completa

6. Forme a soma da solução geral da equação homogênea (etapa 1) com a solução particular da equação não homogênea (etapa 5). Essa é a solução geral da equação não homogênea.

7. Use as condições iniciais para determinar os valores das constantes arbitrárias na solução geral.

ODE não Homogêneas. Coeficientes Indeterminados

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço