EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 05_5

Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular. Parte I

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

INTRODUÇÃO

Vamos considerar agora o problema de resolver a equação geral linear de segunda ordem a seguir (e não uma específica como a de Euler) em uma vizinhança de um **ponto singular regular** $x = x_0$

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Vamos supor, por conveniência, que $x_0 = 0$

Isso significa que:

$$x\frac{Q(x)}{P(x)} = xp(x) \qquad \text{e} \qquad x^2\frac{R(x)}{P(x)} = x^2q(x) \qquad \text{são analíticas em } x = 0$$

O que por sua vez significa que podem ser decompostas em série de Taylor:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{e} \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad \text{convergem em } |x| < \rho$$

TRANSFORMANDO A EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Para fazer com que as funções xp(x) e x^2q(x) apareçam explicitamente na equação diferencial, é conveniente dividi-la por P(x) e depois multiplicá-la por x^2, obtendo

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0$$

Substituindo as funções em colchetes pelas suas séries de potências:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Obtemos nossa equação diferencial transformada:

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots)y = 0$$

Veja que, se todos os coeficientes p_n e q_n forem nulos, com a possível exceção de p_0 e q_0 obtemos a equação de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

TRANSFORMANDO A EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Em geral, alguns dos coeficientes p_n e q_n, $n \geq 1$, não são nulos.

Entretanto, o caráter essencial das soluções da equação diferencial transformada é idêntico ao das soluções da equação de Euler.
A presença dos termos $p_1x + \cdot\cdot\cdot + p_nx_n + \cdot\cdot\cdot$ e $q_1x + \cdot\cdot\cdot + q_nx_n + \cdot\cdot\cdot$ só complica os cálculos.

Vamos restringir nossa discussão principalmente ao intervalo $x > 0$. O intervalo $x < 0$ pode ser tratado, como para a equação de Euler, pela mudança de variável $x = -\xi$ e posterior resolução da equação resultante para $\xi > 0$.

Os coeficientes da equação diferencial transformada são "coeficientes de Euler" multiplicados por séries de potências. Para deixar isto evidente, você pode reescrever o coeficiente de y' como:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

TRANSFORMANDO A EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$p_0x[1 + (p_1/p_0)x + (p_2/p_0)x^2 + \cdot\cdot\cdot + (p_n/ p_0)x^n + \cdot\cdot\cdot]$$

e analogamente para o coeficiente de y.

Por este motivo, pode parecer natural, então, procurar soluções na forma de "soluções de Euler" multiplicadas por uma série de potências.

Supomos, portanto, que

$$y(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} \qquad para\ a_0 \neq 0 \qquad x > 0$$

em que $a_0 \neq 0$. Em outras palavras, r é o expoente do primeiro termo não nulo da série, e a_0 é seu coeficiente

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

TRANSFORMANDO A EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Como parte da solução, temos que determinar:

1. Os valores de r para os quais a equação $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ tem uma solução da forma $y(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$.

2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n.

3. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

A teoria geral foi construída por Frobenius e é razoavelmente complicada. Em vez de tentar apresentar essa teoria, vamos supor, simplesmente, que existe uma solução da forma especificada. Em particular, vamos supor que qualquer série de potências (solução) tem raio de convergência não nulo e vamos nos concentrar em mostrar como determinar os coeficientes em tal série.

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial $$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

Reescrevemos a equação na forma: $$x^2y'' - \frac{x}{2}y' + \frac{1+x}{2}y = 0$$

É fácil ver que x = 0 é um ponto singular da equação acima (é só dividir por x^2 o Q e o R)

Para saber se ele é regular analisamos:

$$\lim_{x\to 0} x\left(-\frac{x}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2} < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1+x}{2x^2}\right) = \frac{1}{2} < \infty$$

Como xp(x) = –1/2 e x^2q(x) = (1 + x)/2 o ponto x=0 é regular.

Como é regular temos que: $$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Mas observando nossa equação $x^2y'' - \frac{x}{2}y' + \frac{1+x}{2}y = 0$ vemos que destas séries

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

só temos os termos , $p_0 = -1/2$ $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/2$ e todos os outros coeficientes p_n e q_n são nulos

Portanto a equação de Euler correspondente (sem o q_1) é:

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2y'' - xy' + y = 0$$

Lembre que o método que aplicamos (já descrito) utiliza as soluções das equações de Euler multiplicadas por polinômios! Por isso identificamos primeiro a qual equação de Euler nossa equação mais geral corresponde...

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Seguindo nosso método, vamos supor agora que existe uma solução da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ portanto, y′ e y″ são dados por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}$$

Substituindo as expressões para y, y′ e y″ na nossa equação (aquela inicial que queremos resolver por este método):

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

Obtemos:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = 0$$

ou (deslocando o índice da última somatória)...

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} = 0$$

Como esta equação tem que ser satisfeita para todo x, o coeficiente de cada potência de x nela tem que ser zero. Como os índices estão deslocados precisamos primeiro deixar em evidencia o coeficiente de x^r...e depois os outros...

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Assim deixamos em evidencia o coeficiente perante x^r e os outros termos agora saem diretamente das somatórias (que tem seus índices alinhados a partir de n=1)

$$a_0[2r(r-1)-r+1]x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]+a_{n-1}\}x^{r+n}=0$$

Como todos estes coeficientes tem que ser iguais a zero, segue que...

$$a_0[2r(r-1)-r+1]=0$$

$$a_n[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]+a_{n-1}=0 \qquad n=1,2,\ldots$$

Como a_0 sempre será diferente de zero pela sua definição (veja o slide 5!) temos que:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

$$a_0[2r(r-1)-r+1]=0 \overset{a_0\neq 0}{\Longleftrightarrow} 2r^2-3r+1=(2r-1)(r-1)=0$$

Esta equação é chamada de equação indicial da nossa equação diferencial original $2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$.

Note que a equação indicial é exatamente a equação polinomial que obteríamos para a equação de Euler $2x^2y''-xy'+y=0$ associada a nossa equação original (lembrando: essa equação polinomial era obtida substituindo $y=x^r$ na equação diferencial).

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1$, $r_2 = ½$

Esses valores de r são chamados de expoentes na singularidade para o ponto singular regular x = 0. Eles determinam o comportamento qualitativo da solução na vizinhança do ponto singular.

EXEMPLO 1

Ainda nos falta lidar com os outros coeficientes da série...

$$a_n[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]+a_{n-1}=0$$

de onde...

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2-3(r+n)+1} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{[2(r+n)-1][(r+n)-1]} \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

Esta relação de recorrência permite calcular os coeficientes a_n se conhecemos os a_{n-1} portanto, **como conhecemos os a_0** (as duas raízes da equação indicial) podemos construir duas soluções...vamos fazer isso....

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Vamos começar com a primeira raiz ou seja r = r_1 = 1

Aplicando a relação $$a_n = -\frac{a_{n-1}}{[2(r+n)-1][(r+n)-1]} \qquad n \geq 1$$

Para r=1 obtemos... $$a_n = -\frac{a_{n-1}}{[2(1+n)-1][(1+n)-1]} = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n} \qquad n \geq 1$$

Portanto...

$$a_1 = -\frac{a_0}{3\cdot 1}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5\cdot 2} = \frac{a_0}{(3\cdot 5)(1\cdot 2)}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{7\cdot 3} = -\frac{a_0}{(3\cdot 5\cdot 7)(1\cdot 2\cdot 3)}$$

Etc...

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{\big(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\big)n!}, n \geq 4$$

EXEMPLO 1

Desta forma, para r = r_1 = 1 e x>0 uma solução da nossa equação diferencial é:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r} = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 x^{n+1}}{\big(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)\big) n!}$$

$$= a_0 x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\big(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)\big) n!} \right]$$

De fato podemos omitir a constante multiplicativa a_0 (pois sabemos que as combinações lineares também são soluções) então esta primeira solução fica:

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 1

Desta forma, para $r = r_1 = 1$ e $x>0$ uma solução da nossa equação diferencial é:

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\big(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\big)n!}\right]$$

Qual é o raio de convergência?

Para determinar o raio de convergência usamos o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\big(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\big)n!\,(-1)^{n+1}x^{n+1}}{\big(3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)(2n+3)\big)(n+1)!\,(-1)^n x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+3)(n+1)} = 0 < \mathbf{1}$$

Esta condição é válida para todo x. Logo, a série converge para todo x e $\rho=\infty$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Vamos agora analisar a segunda raiz ou seja r = r_2= 1/2

Aplicando a relação $$a_n = -\frac{a_{n-1}}{[2(r+n)-1][(r+n)-1]} \qquad n \geq 1$$

Para r=1/2 obtemos... $$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left[2\left(\frac{1}{2}+n\right)-1\right]\left[\left(\frac{1}{2}+n\right)-1\right]} = -\frac{a_{n-1}}{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \qquad n \geq 1$$

Portanto...

$$a_1 = -\frac{a_0}{1\cdot 1}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{(1\cdot 2)(1\cdot 3)}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3\cdot 5} = -\frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 3\cdot 5)}$$

$\ldots$etc

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{\big((1\cdot 3\cdot 5)\cdots(2n-1)\big)n!}, n \geq 1$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Desta forma, para r = r_2 = 1/2 e x>0 a segunda solução da nossa equação diferencial é:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r} = a_0 x^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0 x^{n+1/2}}{\big(1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)\big)n!}$$

$$= a_0 x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\big(1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)\big)n!}\right]$$

Novamente (e pelos mesmos motivos já assinalados) omitimos a constante multiplicativa a_0 de forma que a segunda solução fica:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

EXEMPLO 1

Para $r = r_2 = 1/2$ e $x>0$ a segunda solução da nossa equação diferencial ficou:

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\big(1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)\big)n!}\right]$$

Qual é o raio de convergência?

Para determinar o raio de convergência usamos novamente o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\big(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\big)n!\,(-1)^{n+1}x^{n+1}}{\big(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)\big)(n+1)!\,(-1)^n x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(2n+1)(n+1)} = 0 \color{red}{< \mathbf{1}}$$

Esta condição é válida para todo x. Logo, a série converge para todo x e $\rho=\infty$

EXEMPLO 1

Finalmente, como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se comportam como x e $x^{1/2}$, respectivamente, perto de x = 0, elas são linearmente independentes e portanto formam um conjunto fundamental de soluções. Então a solução geral da nossa equação é:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad x > 0$$

Em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são dadas por:

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\big(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)\big)n!}\right]$$

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\big)n!}\right]$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

COMENTÁRIOS

No exemplo precedente escolhemos o ponto singular como sendo x = 0, mas no caso mais geral este ponto pode ser diferente de zero, $x = x_0$, e teremos que lidar com expressões do tipo $(x-x_0)$. Neste caso a decomposição em série das duas soluções fica com a forma:

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

No entanto, assim como uma equação de Euler pode não ter duas soluções da forma $y = x^r$, uma equação geral com um ponto singular regular pode não ter duas soluções como as estudadas aqui. Em particular, se as raízes r_1 e r_2 da equação indicial forem iguais ou diferirem só por um inteiro, então a segunda solução terá, normalmente, uma estrutura mais complicada. Em todos os casos, no entanto, é possível encontrar pelo menos uma solução das formas estudadas aqui

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

COMENTÁRIOS

Se as raízes da equação indicial forem complexas, então elas não poderão ser iguais nem diferir por um inteiro, de modo que sempre existirão duas soluções da forma estudada aqui. É claro que essas soluções serão funções complexas de x. No entanto, como para a equação de Euler, é possível obter soluções reais tomando as partes real e imaginária das soluções complexas.

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço