EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 05_6

Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular. Parte II

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

INTRODUÇÃO

Retomando, temos o ponto x = x_0 que é um ponto singular regular da equação:

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0$$

em que:

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{e} \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad \text{convergem em } |x| < \rho$$

e a equação correspondente de Euler é: $x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0$

e assumimos que as soluções têm a forma:

$$y(x) = \phi(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad para\, a_0 \neq 0 \qquad x > 0$$

INTRODUÇÃO

Logo calculamos as derivadas

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}$$

E substituímos elas na equação diferencial, obtendo a equação a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n}\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}\right] = 0$$

INTRODUÇÃO

Os produtos de séries dessa equação podem ser desenvolvidos assim:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n}\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}\right]$$

$$= [p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + \cdots][a_0 r x^r + a_1 (r+1) x^{r+1} + \cdots + a_n (r+n) x^{r+n} + \cdots] + [q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + \cdots][a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \cdots + a_n x^{r+n} + \cdots]$$

$$= [p_0 a_0 r + q_0 a_0]\boldsymbol{x^r} + [p_0 a_1 (r+1) + p_1 a_0 r + q_0 a_1 + q_1 a_0]\boldsymbol{x^{r+1}} + \cdots + [p_0 a_n (r+n) + p_1 a_{n-1} (r+n-1) + \cdots + p_n a_0 r + q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + \cdots + q_n a_0]\boldsymbol{x^{r+n}} + \cdots$$

$$= [a_0 (p_0 r + q_0)]\boldsymbol{x^r} + [a_0 (p_1 r + q_1) + a_1 (p_0 (r+1) + q_0)]\boldsymbol{x^{r+1}} + \cdots + [a_0 (p_n r + q_n) + \cdots + a_{n-1} (p_1 (r+n-1) + q_1) + a_n (p_0 (r+n) + q_0)]\boldsymbol{x^{r+n}} + \cdots$$

De forma que equação diferencial com estes produtos desenvolvidos fica:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

INTRODUÇÃO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^r\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n}\right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^r\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}\right] = 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)\boldsymbol{x^{r+n}} + [a_0(p_0 r + q_0)]\boldsymbol{x^r} + [a_0(p_1 r + q_1) + a_1(p_0(r+1) + q_0)]\boldsymbol{x^{r+1}} + \cdots$$
$$+[a_0(p_n r + q_n) + \cdots + a_{n-1}(p_1(r+n-1) + q_1) + a_n(p_0(r+n) + q_0)]\boldsymbol{x^{r+n}} + \cdots = 0$$

$$=[a_0\boxed{(r(r-1) + p_0 r + q_0)}]\boldsymbol{x^r} + [a_0(p_1 r + q_1) + a_1(\boxed{r(r+1) + p_0(r+1) + q_0})]\boldsymbol{x^{r+1}} + \cdots$$
$$+\big[a_0(p_n r + q_n) + a_1(p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(p_1(r+n-1) + q_1)$$
$$+ a_n\big(\boxed{(r+n)(r+n-1) + p_0(r+n) + q_0}\big)\big]\boldsymbol{x^{r+n}} + \cdots = 0$$

Se definimos a função $\boxed{F(r) \equiv (r(r-1) + p_0 r + q_0)}$ podemos escrever esta equação de forma mais compacta...

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EQUAÇÃO INDICIAL

$$=[a_0(r(r-1)+p_0r+q_0)]\boldsymbol{x^r}+[a_0(p_1r+q_1)+a_1(r(r+1)+p_0(r+1)+q_0)]\boldsymbol{x^{r+1}}+\cdots$$
$$+\big[a_0(p_nr+q_n)+a_1(p_{n-1}(r+1)+q_{n-1})+\cdots+a_{n-1}(p_1(r+n-1)+q_1)$$
$$+a_n\big((r+n)(r+n-1)+p_0(r+n)+q_0\big)\big]\boldsymbol{x^{r+n}}+\cdots=0$$

F(r)≡ $\boldsymbol{(r(r-1)+p_0r+q_0)}$

Assim: $$a_0F(r)\boldsymbol{x^r}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_nF(r+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\right\}\boldsymbol{x^{r+n}}=0$$

Como na aula passada, para que esta equação seja satisfeita para todo x > 0, o coeficiente de cada potência de x tem que ser igual a zero

Como $a_0 \neq 0$ (por definição, veja a aula passada) o termo envolvendo x^r leva à equação F(r) = 0. Essa equação é nossa chamada equação indicial; note que é exatamente a equação que obteríamos procurando por soluções da forma $y = x^r$ da equação de Euler.

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Vamos chamar as raízes da equação indicial de r_1 e r_2, com $r_1 \geq r_2$ se as raízes forem reais.

Lembrando que as raízes r_1 e r_2 são chamadas de expoentes na singularidade; elas determinam a natureza qualitativa das duas soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Vamos agora generalizar o método estudado na aula passada para poder incluir todas as possíveis raízes da equação indicial.

Mas antes, ainda temos a relação de recorrência, que se obtém, igualando a zero os coeficientes de x^{r+n} da equação anterior, ou seja:

$$a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_k] = 0 \qquad n \geq 1$$

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA E A PRIMEIRA SOLUÇÃO

$$a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_k] = 0 \qquad n \geq 1$$

A relação de recorrência mostra que, em geral, a_n depende do valor de r e de todos os coeficientes anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.
Ela mostra, também, que podemos calcular sucessivamente os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em função de a_0 e dos coeficientes (p_n e q_n) das séries para xp(x) e para $x^2q(x)$, desde que $F(r + 1), F(r + 2), \ldots, F(r + n), \ldots$ não sejam nulos (veja acima).
Os únicos valores r para os quais F(r) = 0 são as raízes $r = r_1$ e $r = r_2$; como $r_1 \geq r_2$, segue que $r_1 + n$ não é igual a r_1 nem a r_2 se $n \geq 1$ e portanto sabemos que é $\neq 0$.
Portanto, $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$ e teremos como encontrar os coeficientes a_n.
Logo, sempre poderemos determinar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, a saber,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \qquad a_0 = 1 \qquad x > 0$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA E A SEGUNDA SOLUÇÃO

Nesta expressão $$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \qquad a_0 = 1 \qquad x > 0$$

introduzimos a notação $a_n(r_1)$, para indicar que a_n foi determinado utilizando $r = r_1$ na relação de recorrência.
Para especificar a constante arbitrária na solução, foi feita a escolha de a_0 como 1 (que é irrelevante, pois procuramos todas as combinações lineares).

Vamos agora analisar a segunda solução tentando utilizar r_2.
Se r_2 não for igual a r_1 e se $r_1 – r_2$ não for um inteiro positivo (n), então $r_2 + n$ será diferente de r_1 para todo valor de $n \geq 1$ (lembrando que definimos $r_1 > r_2$)..pense!
Ou seja, se $r_2 \neq r_1$, e $r_2 - r_1 \neq n$ para $n \geq 1$, então $r_2 + n \neq r_1$ para todo $n \geq 1$
Portanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ (ou seja, não se anula) e sempre poderemos encontrar os coeficientes da série e obter uma segunda solução como no caso da primeira....

CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], a_0 = 1, x > 0$$

Nesta expressão introduzimos a notação $a_n(r_2)$, para indicar que a_n foi determinado utilizando $r = r_2$ na relação de recorrência.

Da mesma forma que para as soluções em série em torno de um ponto ordinário, discutidas na aula 5.3, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem, pelo menos no intervalo $|x| < \rho$ em que ambas as séries para $xp(x)$ e $x^2q(x)$ também convergem.

Dentro de seus raios de convergência, as séries de potências $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ e $g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definem funções analíticas em x = 0. Isso significa que, o comportamento singular das funções y_1 e y_2, se existirem, será devido aos fatores x^{r_1} e x^{r_2} que multiplicam essas duas funções analíticas.

CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES

A seguir, para obter soluções reais para $x < 0$, podemos fazer a substituição $x = -\xi$ com $\xi > 0$. Lembrando nossa discussão sobre a equação de Euler, basta substituir x^{r_1} e x^{r_2} por $|x^{r_1}|$ e $|x^{r_2}|$, respectivamente.

Finalmente, note que, se r_1 e r_2 forem números complexos, então serão, necessariamente, complexos conjugados e $r_2 \neq r_1 + n$ para qualquer inteiro positivo n.

Assim, nesse caso sempre podemos encontrar duas soluções em série da forma dos slides anteriores, no entanto, elas são funções complexas de x.

Soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas (como já explicado).

Antes de vermos um exemplo, alguns comentários:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

COMENTÁRIOS

É importante lembrar que r_1 e r_2, os expoentes no ponto singular, são fáceis de encontrar e que eles determinam o comportamento qualitativo das soluções. Para calcular r_1 e r_2, basta resolver a equação indicial de segundo grau...

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

cujos coeficientes são dados por $p_0 = \lim_{x \to 0} x\, p(x) \;\; e \;\; q_0 = \lim_{x \to 0} x^2\, q(x)$

Note que esses são exatamente os limites que precisam ser calculados para classificar o ponto singular como ponto singular regular; assim, em geral, eles já foram determinados em um estágio anterior do exercício.

COMENTÁRIOS

Além disso, se x = 0 é um ponto singular regular da equação

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

em que as funções P, Q e R são polinômios, então $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ e $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Logo,

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad e \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

Finalmente, há que lembrar que os raios de convergência das séries que representam as soluções (y_1 e y_2), são pelo menos, iguais à distância da origem ao zero mais próximo do polinômio P(x) (diferente do próprio x = 0).

Vamos resolver um exercício como exemplo.

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

EXEMPLO 1

Vamos estudar as soluções da equação a seguir perto dos pontos singulares

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

Esta equação é do tipo $$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Comparando vemos que P(x) = 2x(1 + x), Q(x) = 3 + x e R(x) = –x.

Para identificar os pontos singulares claramente, reescrevemos a equação assim:

$$y'' + \frac{3+x}{2x(1+x)}y' - \frac{x}{2x(1+x)}y = 0$$

Evidentemente, os pontos x = 0 e x = –1 são os únicos pontos singulares.

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

Vamos começar com o primeiro ponto singular x=0.
Para saber que tipo de ponto singular é aplicamos o critério dos limites...
Para o ponto x=0 temos:

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\,\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2} < \infty \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\,\frac{-x}{2x(1+x)} = 0 < \infty$$

Logo, como o limite é finito ele é regular

Agora vamos à equação indicial...ela é:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

Que no nosso caso fica:

$$r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$$

Os expoentes no ponto singular são as raízes desta equação que são 0 e -1/2 pois:

$$2r(r-1) + 3r = 0$$
$$2r^2 + r = 0$$
$$r(2r+1) = 0$$

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

Como as raízes (0 e -1/2) não são iguais nem diferem por um inteiro, existem duas soluções da forma $y_{1,2}(x) = x^{r_{1,2}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(r_{1,2}\right)x^n\right]$ que já vimos, ou seja:

$$y_1(x) = 1\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n\right] \qquad y_2(x) = x^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{1}{2}\right)x^n\right]$$

em que os coeficientes a_n são obtidos a partir da relação de recorrência

Sobre a convergência:

Uma cota inferior para o raio de convergência de cada série é 1, que é a distância da origem x = 0 até x = –1, que é o único zero de P(x) que conta, (lembrando que se excluem desta conta as raízes de P(x) que forem iguais a zero).

Note que a solução $y_1(x)$ permanece limitada quando $x \to 0$ (veja a série) e é, de fato, analítica aí; a segunda solução y_2 torna-se ilimitada quando $x \to 0$ (os colchetes são sempre analíticos, como já vimos).

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

No caso do ponto x = –1 ele também é um ponto singular regular, pois lembrando os comentários no slide 21 da aula 5.5 sobre expressões do tipo (x-x_0)...temos:

$$p_0 = \lim_{x\to -1}(x+1)\frac{3+x}{2x(1+x)} = -1 < \infty \qquad q_0 = \lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0 < \infty$$

Neste caso a equação indicial é: $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$$r(r-1) - r = 0 \qquad r^2 - 2r = 0 \iff r(r-2) = 0 \iff r_1 = 2 \quad r_2 = 0$$

As raízes da equação indicial são r_1 = 2 e r_2 = 0.
Estas raízes diferem por um inteiro positivo (o número 2).

Assim, no ponto singular x=-1, no caso da maior raiz (r_1=2) sabemos que existe uma solução da forma $y_1(x) = x^{r_1}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n]$, vamos escrever ela...

EXEMPLO 1

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right]$$

Esta série converge.
Podemos verificar isso pelo método da razão ou notar que o zero de 1 + x é x = -1. Como a distância de 0 a -1, é 1, o raio de convergência da série de potências em torno de x = -1 é pelo menos 1. Assim a série converge pelo menos para |x + 1| < 1, e y_1 é uma função analítica aí (mais detalhes veja a aula 5.1 sobre critérios de convergência novamente).

A questão vem a seguir, no caso da segunda raiz (x=0). Como as duas raízes diferem por um inteiro positivo, pode existir ou não uma segunda solução da forma:

$$y_2(x) = 1\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n\right]$$

RAÍZES IGUAIS

Vamos considerar, agora, os casos em que a equação indicial tem raízes iguais ou que diferem por um inteiro positivo, $r_1 - r_2 = N$.

Como mostramos anteriormente, sempre existe uma solução da forma $y_1(x) = x^{r_1}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n]$ correspondente à maior raiz r_1 da equação indicial.

Por analogia com a equação de Euler, poderíamos esperar que, se $r_1 = r_2$, então a segunda solução conteria um termo logarítmico. Isso também poderá ser verdade se as raízes diferirem por um inteiro.

Vamos começar pelo caso das **raízes iguais**.

O método para encontrar a segunda solução é o mesmo que usamos para encontrar a segunda solução da equação de Euler (veja a aula 5.4) quando as raízes da equação indicial eram iguais.

Vamos considerar r como uma variável contínua e determinar a_n em função de r resolvendo a relação de recorrência, vejamos como :

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RAÍZES IGUAIS

Retomando a equação do slide 6 (onde desenvolvemos a equação geral abaixo, a partir da qual obtivemos a relação indicial e a de recorrência),

$$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_k] \right\} x^{r+n} = 0$$

Nesta equação todos os termos $a_n(r)$ para $n \geq 1$, envolvendo x^{r+1}, x^{r+2}, x^{r+3}, . . . têm coeficientes nulos e como a_0 é diferente de zero (pela definição de quem é a_0) obteremos que:

$$a_0 F(r) x^r = 0$$

em que F(r) tem que ser zero. Lembrando que a função F(r) foi definida como $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$ portanto:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

RAÍZES IGUAIS

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$$

A expressão de F(r) se reduz (no caso de raízes iguais) a

$$F(r) = \ (r - r_1)^2$$

de forma que podemos escrever (lembrando a definição do operador diferencial L[ϕ]≡ϕ´´+ pϕ´+q)

$$L[\phi](r,x) = a_0 F(r) x^r = a_0 (r - r_1)^2 x^r$$

Como já sabemos, neste caso existe para r = r_1 uma solução $y_1(x)$ na forma $x^{r_1}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n]$. Porém, mais importante, é que segue também, desta última igualdade (da mesma forma que para a equação de Euler) ($x^r = e^{r \ln x}$), que

$$L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\phi\right](r_1, x) = a_0 \frac{\partial}{\partial r}(r - r_1)^2 x^r \bigg|_{r=r_1} = a_0 \left[(r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1) x^r\right]\bigg|_{r=r_1}$$

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

RAÍZES IGUAIS

Portanto, graças ao fato de termos o parêntesis em $L[\phi](r,x) = a_0\,(\boldsymbol{r-r_1})^{\boldsymbol{2}}x^r$ ao quadrado, segue uma segunda solução:

$$\begin{aligned} y_2(x) = \left.\frac{\partial\phi(r,x)}{\partial r}\right|_{r=r_1} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right]\right\}\Bigg|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \\ &= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \qquad x > 0, \end{aligned}$$

em que $a_n'(r_1) = \left.\frac{\partial a_n}{\partial r}\right|_{r=r_1}$

Embora esta expressão seja explícita para a segunda solução $y_2(x)$, pode ser difícil determinar $a_n(r)$ como função de r a partir da relação de recorrência e depois diferenciar a expressão resultante em relação a r, por isso veremos outra forma de obter esta solução...

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

RAÍZES IGUAIS

Obtivemos: $$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n$$ em que $a_n'(r_1) = \left.\frac{\partial a_n}{\partial r}\right|_{r=r_1}$

Outra maneira de obter y_2 é, simplesmente, supor que y tem a forma da equação acima, onde desconhecemos os coeficientes b_n ou seja, suponha que, após encontrar $y_1(x)$:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n$$

E agora os coeficientes b_n são calculados (como já fizemos) substituindo a solução proposta na equação diferencial, juntando os termos correspondentes e igualando os coeficientes de cada potência de x a zero.
Por último, uma terceira possibilidade é usar o método de redução de ordem (que já estudamos) para encontrar $y_2(x)$, uma vez conhecida $y_1(x)$.

RAÍZES IGUAIS

Resumindo obtivemos que as soluções para o caso de raízes iguais são:

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n\right]$$

Agora nos falta ver o caso de raízes que diferem por um inteiro...

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

RAÍZES DIFERINDO POR UM INTEIRO N

Neste caso, a dedução da segunda solução é bem mais complicada e não será deduzida aqui. As soluções neste caso são:

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \qquad y_2(x) = a y_1(x)\ln x + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]$$

em que: $$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}\left[(r - r_2)a_n(r)\right]_{r=r_2} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$a = \lim_{r\to r_2}\left[(r - r_2)a_N(r)\right]_{r=r_2} \qquad \text{em que } r_1 - r_2 = N$$

Vamos resumir tudo num teorema:

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR PII

TEOREMA (RESUMO)

Considere a equação diferencial $x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0$

em que x = 0 é um ponto singular regular.
Então, xp(x) e x^2q(x) são analíticas em x = 0 com expansão em séries de potências convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad\qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para |x| < ρ, em que ρ > 0 é o mínimo entre os raios de convergência das séries de potências para xp(x) e x^2q(x).
Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial $\mathrm{F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = 0}$

Se $r_1 \geq r_2$, e ambas são reais, então, em um dos intervalos –ρ < x < 0 ou 0 < x < ρ, existe uma solução da forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \qquad a_0 = 1 \qquad x > 0$$

em que os $a_n(r_1)$ são dados pela relação de recorrência com a_0 = 1 e r = r_1

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TEOREMA (RESUMO)

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então, em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, existe uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right] \qquad a_0 = 1 \qquad x > 0$$

em que os $a_n(r_2)$ também são dados pela relação de recorrência com $a_0 = 1$ e $r = r_2$

Se $r_1 = r_2$, então a segunda solução é:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n\right]$$

Se $r_1 - r_2 = N$ então a segunda solução é:

$$y_2(x) = a y_1(x)\ln x + x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]$$

Os coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ e a constante "a" podem ser determinados substituindo-se a forma da solução em séries para y na equação diferencial. A constante "a" pode ser nula, caso no qual não há termo logarítmico na última solução. Cada uma das séries converge pelo menos para $|x| < \rho$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

Em todos os três casos, as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

SOLUÇÃO PERTO DE UM PONTO SINGULAR REGULAR

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço