EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA TE 315

Aula 06_7

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

INTRODUÇÃO

Finalmente, para completar o estudo dos sistemas lineares, vamos considerar o sistema não homogêneo

$$
\begin{aligned}
x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\
&\vdots \\
x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)
\end{aligned}
$$

Que pode ser escrito como **x**´=**P**(t)**x**+**g**(t) em que:

$$
\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}
$$

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

SOLUÇÃO GERAL

Pelo mesmo argumento usado na aula 03_4 (veja, também, o Problema 16 dessa aula), a solução geral da equação não homogênea pode ser expressa na forma

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t)$$

em que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo **x′** = **P**(t)**x** e **v**(t) é uma solução particular do sistema não homogêneo.

Vamos descrever, rapidamente, diversos métodos para encontrar **v**(t).

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

METODO 1: DIAGONALIZAÇÃO

Vamos supor um sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ em que $\mathbf{A}$ é uma matriz (nxn) diagonalizável.

Diagonalizando a matriz de coeficientes **A** como indicado na aula 06_6, podemos transformar nosso sistema em um sistema de equações que pode ser resolvido facilmente (desacopladas)

Seja **T** a matriz cujas colunas são os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ de **A** e definimos uma nova variável dependente **y** por meio de $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$.

Substituindo obtemos: $\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \qquad \text{em que } \mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$$

Achando **y**, obteremos a solução **x** por meio de **Ty**

METODO 1: DIAGONALIZAÇÃO

Então agora temos que resolver **y**'= **Dy** + **h**(t), ou seja:

$$\left.\begin{array}{c} y_1' = r_1 y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_n + h_1(t) \\ y_2' = 0y_1 + r_2 y_2 + \cdots + 0y_n + h_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = 0y_1 + 0y_2 + \cdots + r_1 y_n + h_n(t) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Que é um sistema de n equações desacopladas para $y_1(t)$, ... , $y_n(t)$ e portanto podem ser resolvidas separadamente (por exemplo, como vimos na aula 02_1 pelo método dos fatores integrantes) como equações escalares (e não matriciais)

$$y_k' = r_1 y_k + h_k(t) \qquad k = 1, \dots, n$$

$$y_k = e^{r_k t} \int_{t_0}^{t} e^{-r_k s} h_k(s) ds + c_k e^{r_k t} \qquad k = 1, \dots, n$$

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral do sistema $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$

Procedendo como na aula 06.3, vemos que os autovalores da matriz de coeficientes são $r_1 = -3$ e $r_2 = -1$, e os autovetores correspondentes são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo, a solução geral do sistema homogêneo é: $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

Antes de escrever a matriz **T** de autovetores, lembre que vamos precisar encontrar $\mathbf{T}^{-1}$. A matriz de coeficientes **A** é real e simétrica; logo, podemos usar o resultado enunciado antes do Exemplo 3 na aula 06_5: $\mathbf{T}^{-1}$ é, simplesmente, a adjunta ou (como **T** é real) a transposta de **T**, desde que os autovetores de **A** estejam normalizados de modo que $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = 1$. Portanto, normalizando $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, temos:

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 1

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{(1)(1)+(-1)(-1)}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{(1)(1)+(1)(1)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, para esta escolha de autovetores, temos:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a transformação **x**=**Ty** obtemos o sistema diagonal para a nova variável **y,** ou seja **y'= Dy** + $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}$$

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 1

Assim, as equações desacopladas (escalares) e suas soluções (aula 02_1) são:

$$y_1' + 3y_1 = \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right) + c_1 e^{-3t}$$

$$y_2' + y_2 = \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t \quad \Rightarrow \quad y_2 = \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2 e^{-t}$$

Finalmente, escrevemos a solução em função das variáveis originais pela transformação **x=Ty**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} - \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{6}\right) + k_1 e^{-3t} \\ te^{-t} + \frac{3}{2}(t-1) + k_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{-3t} + \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -k_1 e^{-3t} + \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{c_1}{\sqrt{2}}, k_2 = \frac{c_2}{\sqrt{2}}$$

EXEMPLO 1

Simplificando, a solução **x** pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{-3t} + \left(k_2 + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -k_1 e^{-3t} + \left(k_2 - \frac{1}{2}\right) e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Os dois primeiros termos formam a solução geral do sistema homogêneo associado. Os termos restantes formam uma solução particular do sistema não homogêneo.

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

CASO NÃO DIAGONALIZÁVEL

E se a matriz **A** não for diagonalizável?

Se a matriz de coeficientes **A** do sistema não for diagonalizável (devido a autovalores repetidos e a falta de autovetores), ela pode, de qualquer forma, ser reduzida à sua forma canônica de Jordan **J** através de uma matriz de semelhança apropriada **T**, envolvendo tanto autovetores quanto autovetores generalizados.

Neste caso, as equações diferenciais para y_1, ... ,y_n não estarão totalmente desacopladas, já que algumas linhas de **J** terão dois elementos não nulos: um autovalor na posição diagonal e um número 1 na posição adjacente à direita.

No entanto, as equações para y_1, ... ,y_n ainda podem ser resolvidas sequencialmente, começando com y_n.

A seguir, a solução do sistema pode ser encontrada pela relação **x** = **Ty**.

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

MÉTODO 2: COEFICIENTES INDETERMINADOS

Uma segunda forma de encontrar uma solução particular do sistema não homogêneo é o método dos coeficientes indeterminados que estudamos na aula 03_4.

Lembrando, este método só é aplicável se a matriz de coeficientes **P** for constante e se as componentes de **g** forem funções polinomiais, exponenciais, senoidais ou somas ou produtos de tais funções.

O procedimento para escolher a forma da solução é, essencialmente, o mesmo que o dado na aula 03_4 para equações lineares de segunda ordem.

A diferença principal é quando temos um termo não homogêneo **g** da forma $\mathbf{u}e^{\lambda t}$, em que λ é uma raiz simples da equação característica (um autovalor simples da matriz **P**).

Nesta situação, em vez de supor uma solução da forma $\mathbf{a}te^{\lambda t}$, é preciso usar $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, em que **a** e **b** são determinados substituindo-se a expressão na equação diferencial.

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 2

Considere novamente o sistema não homogêneo do exemplo 1. Vamos aplicar o método dos coeficientes indeterminados...

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

Escrevemos **g**(t) na forma: $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t$

Como r = −1 é um autovalor da matriz de coeficientes é necessário incluir tanto **a**te^{-t} quanto **b**e^{-t} na solução. Vamos supor, então, que

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$$

em que **a**, **b**, **c** e **d** são vetores a serem determinados.

EXEMPLO 2

Substituindo $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$ no lugar de **x** em **x**´= **Ax**+**g** , obtemos:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

$$-\mathbf{a}te^{-t} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})e^{-t} + \mathbf{c} = \mathbf{Aa}te^{-t} + \mathbf{Ab}e^{-t} + \mathbf{Ac}t + \mathbf{Ad} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

Igualando os coeficientes... $\mathbf{Aa} = -\mathbf{a}$ $\mathbf{Ab} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{Ac} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{Ad} = \mathbf{c}$

Da primeira equação vemos que **a** é um autovetor de **A** correspondente ao autovalor r = −1 e portanto tem a forma

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

em que α é qualquer constante diferente de zero (veremos, ao resolver a segunda equação, que α=1).

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 2

Substituindo $\mathbf{a}^T = (\alpha,\alpha)$ na segunda equação... $\mathbf{Ab} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2(\alpha - 1) \end{pmatrix}$$

Olhando para a última equação vemos que $\alpha=1$ e que b_1-b_2=1...portanto b_2= b_1-1 para qualquer valor de b_1, ou seja, chamemos k a esse valor aleatório para b_1:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{escolhemos } k = 0 \rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A terceira e a quarta equações dão $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ e $\mathbf{d}^T = (-4/3, -5/3)$, respectivamente, assim a solução particular será:

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 2

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comparando esta solução particular do exemplo 2 com a obtida no exemplo 1 vemos que ambas soluções seriam as mesmas se tivéssemos escolhido a constante k = ½ no vetor **b** (correspondente ao termo contendo e^{-t}) no lugar de k=0.

Vamos agora ver outro método (o terceiro) para encontrar a solução particular...o método da variação de parâmetros...

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

MÉTODO 3: VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Este método se aplica em casos mais gerais que os anteriores. Vamos considerar novamente nosso sistema $\mathbf{x}'= \mathbf{P}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$ em que $\mathbf{P}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ são contínuas num intervalo $\alpha<t<\beta$.
Suponha que $\boldsymbol{\Psi}(t)$ seja uma matriz fundamental para o sistema homogêneo (já encontrada).

Lembramos que então as colunas de $\boldsymbol{\Psi}(t)$ são soluções linearmente independentes de $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ e portanto $\boldsymbol{\Psi}(t)$ é invertível no intervalo $\alpha<t<\beta$ e também por ser umas matriz de soluções satisfaz $\boldsymbol{\Psi}'(t)=\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$
Também lembremos que a solução geral do problema homogêneo pode ser escrita como $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}$

Por isso é natural proceder como na aula 03_4 e buscar uma solução do sistema não homogêneo substituindo o vetor constante $\mathbf{c}$ por uma função vetorial $\mathbf{u}(t)$.

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

MÉTODO 3: VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Vamos propor que a solução particular do sistema não homogêneo tenha a forma $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ em que o vetor $\mathbf{u}(t)$ deva ser encontrado

Substituindo esta solução na equação $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$ obtemos

$$\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t)$$

Como $\mathbf{\Psi}(t)$ é uma matriz fundamental, ela satisfaz $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Psi}(t)$ e podemos escrever (simplificando)...

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$$

Portanto (como existe a inversa de $\mathbf{\Psi}(t)$) encontramos $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)$

Agora só falta integrar para achar $\mathbf{u}(t)$, ou seja:

MÉTODO 3: VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Integrando:

$$\mathbf{u}(t) = \int \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{g}(t)dt + \mathbf{c}$$

em que **c** é um vetor constante de integração

A solução geral será:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c} + \boldsymbol{\Psi}(t)\int_{t_1}^{t} \boldsymbol{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds \qquad t_1 \in (\alpha, \beta)$$

O primeiro termo à direita do sinal de igualdade é a solução geral do sistema homogêneo, e o segundo termo é uma solução particular.

Para resolver explicitamente o problema (ou seja para resolver explicitamente a integral da solução particular) precisamos de uma condição inicial.

Vamos supor a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ do nosso sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

MÉTODO 3: VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Poderemos encontrar a solução deste problema se definimos o limite inferior de integração como o ponto inicial t_0. Então a solução geral da equação diferencial é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds$$

Para $t = t_0$, a integral é zero, de modo que a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ também será satisfeita se escolhermos $\mathbf{c} = \mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$ portanto a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds$$

Poderíamos utilizar a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t) \equiv \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$ (ver aula 06_5, slide 7) que satisfaz a condição $\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbf{I}$, assim teríamos:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds$$

EXEMPLO 3

Considere novamente o sistema não homogêneo dos exemplos 1 e 2. Vamos aplicar o método das variação de parâmetros....

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

Já conhecemos a solução homogênea e uma matriz fundamental $\mathbf{\Psi}$ é

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Utilizando o método da variação de parâmetros a solução do sistema será dada por **x** = **Ψ**(t)**u**(t) em que **u**(t) satisfaz **Ψ**(t)**u**´(t) = **g**(t), ou escrito na forma matricial...

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 3

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Resolvemos a matriz pelo método de redução de linhas visto em álgebra linear...

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} & 2e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} & 3t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} & 2e^{-t} \\ 0 & 2e^{-t} & 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} & 2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & e^{-t} + 3t/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & e^{-t} - 3t/2 \\ 0 & e^{-t} & e^{-t} + 3t/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{2t} - 3te^{3t}/2 \\ 0 & 1 & 1 + 3te^{t}/2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} u_1' = e^{2t} - 3te^{3t}/2 \\ u_2' = 1 + 3te^{t}/2 \end{array}$$

Portanto (integrando):

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + c_1 \\ t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t} + c_2 \end{pmatrix}$$

Mas **u** não é nossa solução, precisamos de **x**...

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

EXEMPLO 3

Finalmente, como **x** = **Ψ**(t)**u**(t) obtemos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t}/2 - te^{3t}/2 + e^{3t}/6 + c_1 \\ t + 3te^{t}/2 - 3e^{t}/2 + c_2 \end{pmatrix}$$

Agrupando termos e simplificando, se obtém:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

que é a mesma solução do exemplo 1 e é equivalente à do exemplo 2.

SISTEMA LINEAR NÃO HOMOGÊNEO

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço